

# Chapter 1

## Une première vue

### 1.1 Introduction

Soit une quantité  $U$  donnée par unité de volume dans un volume  $\Omega$  borné par une surface  $\Gamma$  (voir Fig. 1.1). Localement, l'intensité  $U$  dépend de termes sources volumiques  $Q_V$  et surfaciques  $Q_S$  ainsi que des contributions des points voisins qui peuvent s'exprimer en termes de flux.

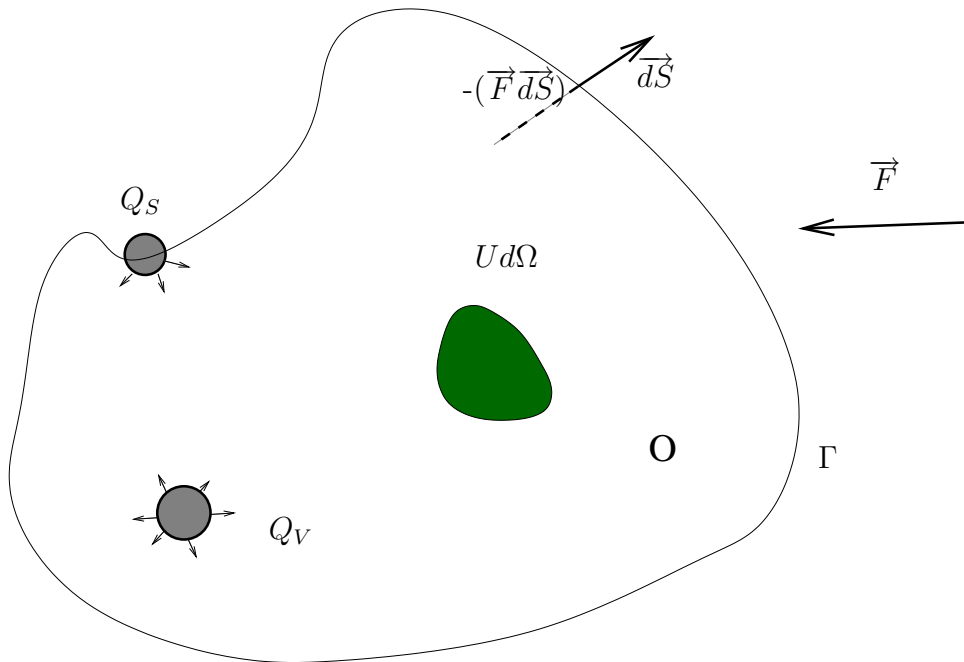


Figure 1.1: Forme générale d'une loi de conservation

La forme générale d'une loi de conservation exprime que la variation en temps de  $U$  ne dépend que de termes sources et du flux à travers la surface  $\Gamma$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_I} U d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_{\Gamma} Q_S \cdot d\vec{S} \text{ dans } \Omega_I \quad (1.1)$$

La méthode de volumes finis (MVF) est particulièrement bien adaptée aux lois de conservation, car elle traite directement la forme intégrale. Cette méthode assure ainsi au niveau discret la propriété de conservativité et permet de capturer les discontinuités ou chocs.

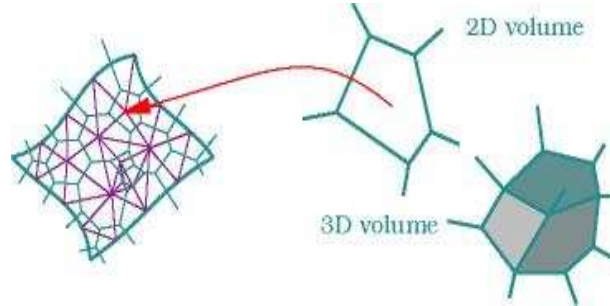


Figure 1.2: Volumes de contrôle

Le domaine d'étude  $\Omega$  est découpée en un nombre fini de volumes  $\Omega_I$  appelés volumes de contrôle ou cellules (cf Fig. 1.2) et l'équation intégrale est écrite dans chaque volume de contrôle. La **liberté de choix dans la géométrie**(cf Fig. 1.3 et 1.4 ) de ces volumes (triangles, quadrilatères, ou tout autre type de polygones en 2D , et de tétraèdres , hexaèdres or autres polyèdres en 3D), ainsi que la **liberté de choix dans la méthode** et la précision pour le calcul du flux à travers les surfaces frontières donnent une grande flexibilité à la MVF. C'est pour toutes ces raisons que la MVF est une des discrétisations les plus utilisées en mécanique des fluides.

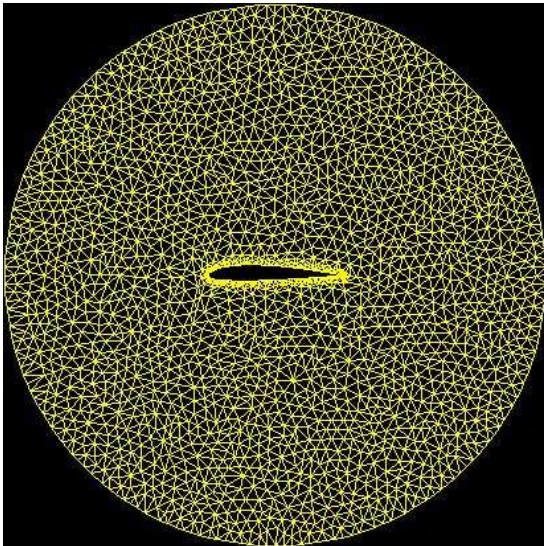


Figure 1.3: Maillage non-structuré S

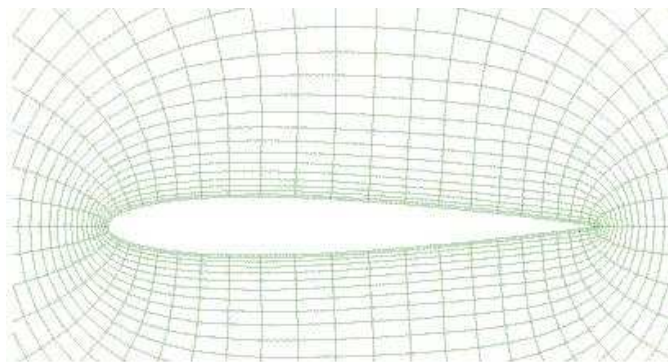


Figure 1.4: Maillage structuré

Un peu d'histoire: les volumes finis sont apparus dans la mécanique des fluides de façon indépendante début 70., en 1971 (McDonald) , 1972 (Mac-Cormack et Paullay), 1973 (Rizzi et Inouye). Les premières études mathématiques datent des années 80, 1980 (Crandall et Majda), 1983 (Sanders et Osher), 1983 (Eymard et Gallouët).

## 1.2 Pourquoi une formulation conservative

### Rappel: les relations de Rankine-Hugoniot:

Les équations d'Euler admettent des solutions discontinues (nappes tourbillonnaires, discontinuités de contact, chocs). Les propriétés de ces solutions discontinues ne peuvent être obtenues que par la résolution des équations de conservation sous forme intégrale, les gradients n'étant pas définis sur les surfaces de discontinuités.

Pour une surface de discontinuité  $\Sigma$  se déplaçant avec une vitesse  $\vec{C}$ , les équations d'Euler dans un volume  $V$  (voir 1.5) sous forme intégrale en l'absence de termes sources sont:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot dS = 0 \text{ dans } V \quad (1.2)$$

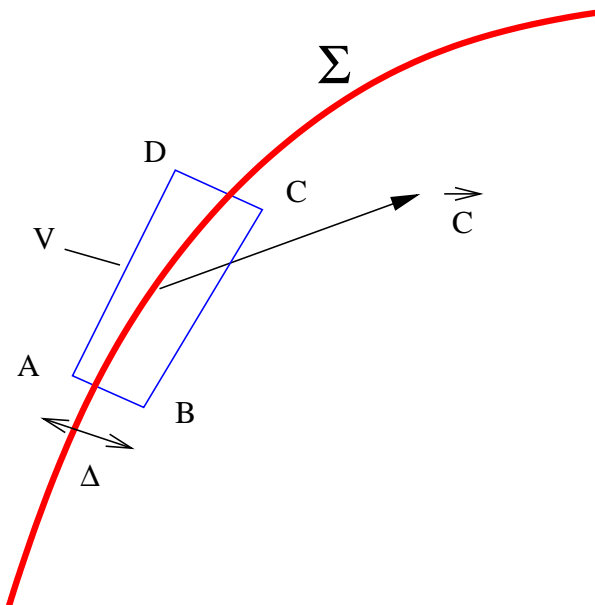


Figure 1.5: Volume de contrôle autour d'une discontinuité

Si l'on note  $[A] = A_2 - A_1$  le saut de la variable  $A$  au travers de la discontinuité, on obtient la relation de Rankine-Hugoniot

$$[\vec{F}] \cdot \vec{\nabla} \Sigma + \frac{\partial \Sigma}{\partial t} [U] = 0 \quad (1.3)$$

### Quelques notations:

Soit une équation de conservation sous la forme générale :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div} F(U) = Q_V \text{ dans } \Omega \quad (1.4)$$

avec  $\Omega$  domaine borné de  $\mathbb{R}^p$  de frontière  $\Gamma$ ,

$U = U(x, t)$  fonction de  $\mathbb{R}^p \times [T1, T2]$ , (les termes sources de surface proviennent des conditions aux limites qui seront traitées plus tard. )

Soit  $\Omega_I$  ensemble d'ouverts de  $\mathbb{R}^p$  tels que

- $\bigcup_I \Omega_I = \Omega$
- $\forall I, \Gamma_I = \partial\Omega_I = \Gamma_{0I} \bigcup_J \Gamma_{IJ}$   
avec  $\Gamma = \bigcup_I \Gamma_{0I}$  et  $\Gamma_{IJ} = \overline{\Omega_I} \cap \overline{\Omega_I}$   
et éventuellement  $\Gamma_{0I} = \emptyset$

On intègre (1.4) dans tout  $\Omega_I$  en appliquant la formule de Green

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_I} U d\Omega + \oint_{\partial\Omega_I} F(U) \cdot dS = \int_{\Omega_I} Q_V d\Omega \text{ dans } \Omega_I \quad (1.5)$$

On note  $U_I = \frac{1}{|\Omega_I|} \int_{\Omega_I} U d\Omega$  avec  $|\Omega_I| = vol(\Omega_I)$ .

(1.5) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} U_I + \sum_J |\Gamma_{IJ}| \Phi(U_I, U_J, \mathbf{n}_{IJ}) = G_I \quad (1.6)$$

avec  $\mathbf{n}_{IJ}$  normale extérieure à  $\Omega_I$  sur  $\Gamma_{IJ}$  et

$$|\Gamma_{IJ}| \Phi(U, U, \mathbf{n}_{IJ}) = \oint_{\Gamma_{IJ}} F(U) \cdot dS$$

$\Phi$  est appelé **flux numérique** approximation de F.

**Définition 1 :** Le flux numérique  $\Phi$  est dit **conservatif** si

$$\Phi(U_I, U_J, \mathbf{n}) = -\Phi(U_J, U_I, -\mathbf{n}) \quad (1.7)$$

Cette définition ne fait que traduire au niveau discret la relation sur les flux continus

$$(\int_{\Gamma_{IJ}} \dots dS = -\int_{\Gamma_{JI}} \dots dS)$$

**Définition 2:** Le flux numérique  $\Phi$  est dit **consistant** si

$$\Phi(U, U, \mathbf{n}) = F(U) \cdot \mathbf{n} \quad (1.8)$$

Ceci est naturel car si  $U(x, t) = U$  constant alors

$$|\Gamma_{IJ}| \Phi(U, U, \mathbf{n}_{IJ}) \stackrel{def}{=} \oint_{\Gamma_{IJ}} F(U) \cdot dS = |\Gamma_{IJ}| F(U)$$

Voici le théorème qui montre l'intérêt d'une formulation conservative:

### **Théorème de Lax-Wendroff (1960):**

Soit  $V_h = (\Omega_I)^h$  une famille de recouvrement de  $\Omega$  telle que  $\forall I, \exists a, b \geq 0$ , tel que  $ah^p \leq |\Omega_I^h| \leq bh^p$

Soit  $\Phi$  un flux numérique Lipschitzien consistant et conservatif, approximation de F

Soit  $U_I^h$  solution de

$$\frac{\partial}{\partial t} U_I^h + \sum_J |\Gamma_{IJ}| \Phi(U_I^h, U_J^h, \mathbf{n}_{IJ}) = G_I \quad (1.9)$$

pour tout  $\Omega_I$  de  $V_h$ .

Si  $(U_I^h)$ , pour  $h \rightarrow 0$  converge de façon bornée ( $(\|U^h\|_{L^\infty} \leq C)$ ) vers une fonction  $U(x,t)$ , alors  $U(x,t)$  est une solution faible de (1.4), autrement dit cette solution vérifiera les relations de Rankine-Hugoniot en présence de discontinuités.

## **1.3 Principes d'un schéma volume fini**

On veut résoudre l'ensemble d'équations (1.5), sur un intervalle de temps  $[T1, T2]$  discrétisé par un ensemble de points  $(t_n)_{n=0, nmax}$ ,  $t_0 = T1$ , et  $t_{nmax} = T2$ .

**Les inconnues du problème sont les valeurs moyennées**

$$U_I^n = \frac{1}{|\Omega_I|} \int_{\Omega_I} U^n d\Omega \text{ avec } |\Omega_I| = vol(\Omega_I).$$

1. A l'instant  $t_0$ , la solution initiale donnée  $U(x, t_0)$  est approchée par ses moyennes  $U_I^0 = \frac{1}{|\Omega_I|} \int_{\Omega_I} U(., t = 0) d\Omega$  sur les volumes de contrôle  $\Omega_I$
2. Pour obtenir  $U_I^{n+1}$  à partir de  $U_I^n$ , 2 étapes sont nécessaires:
  - (a) Reconstruction: A partir des  $U_I^n$ , déterminer une fonction P, polynômiale par morceaux qui approche  $U(x, t_n)$
  - (b) Évolution : A partir de l'équation (1.5) discrétisée en temps, et la connaissance de  $U_I^n$  et  $P/\partial\Omega_I$ , calculer  $U_I^{n+1}$

**Remarques pour le programmeur:**

- L'ensemble des volumes de contrôle doivent recouvrir le domaine d'étude.
- Deux volumes de contrôle adjacent peuvent se recouvrir, mais toute face interne doit être commune à deux volumes.
- ★ Le calcul des flux à travers la surface frontière d'une cellule doit être calculée de façon indépendante de cette cellule.

## 1.4 Exemple d'un schéma volume fini

Pour fixer les idées au niveau reconstruction, on regarde le cas d'une équation stationnaire 1D:

Comment résoudre par méthode des volumes finis avec une méthode d'ordre 2

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ dans } [a,b] \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases} \quad (1.10)$$

Soit un maillage de l'intervalle  $\Omega = [a, b]$  discrétisé par  $N+1$  points.

$$a = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{N+1/2} = b$$

On définit  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , et

$$x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}$$

$$h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} \text{ et}$$

$$h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$$

Pour simplifier, on pose  $h_i = h$

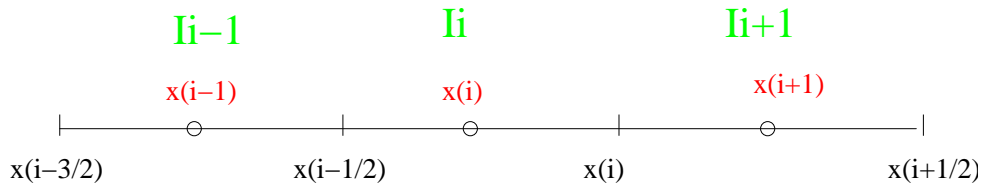


Figure 1.6: Notations

Les inconnues du problème sont :  $u_I = \frac{1}{h} \int_{I_i} u dx$

1. Formulation conservative: On réécrit l'équation 1.10 sous forme conservative pour tout  $I_i$ :

$$[l] \begin{cases} \int_{I_i} \nabla \cdot \nabla u dx = \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-1/2}) = \int_{I_i} f dx \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases} \quad (1.11)$$

Problème: Il faut exprimer  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2})$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-1/2})$  à partir de  $u_I$  avec une méthode d'ordre 2:

2. Reconstruction : Il suffit de trouver deux polynômes  $p_-$  et  $p_+$  d'ordre 1 (de la forme  $\alpha_{\pm}x + \beta_{\pm}$ ) tel que  
 $p_-$  est définie sur  $(I_{i-1} \cup I_i)$  et  
 $p_+$  est définie sur  $(I_i \cup I_{i+1})$  avec  
 $\int_{I_{i-1}} p_-(x) dx = hu_{i-1}$  et  $\int_{I_i} p_-(x) dx = hu_i$  et  
 $\int_{I_i} p_+(x) dx = hu_i$  et  $\int_{I_{i+1}} p_+(x) dx = hu_{i+1}$ .

Pour chaque polynôme, 2 inconnues et 2 équations. Pour les cellules de bord, les conditions de Dirichlet remplacent une des conditions en moyenne.

Connaissant  $p_-$ , on approche  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-1/2})$  par  $\frac{\partial p_-}{\partial x}(x_{i-1/2})$  et de même pour  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2})$  avec  $\frac{\partial p_+}{\partial x}(x_{i+1/2})$

3. Résolution d'un système linéaire: Pour tout  $I_i$  ( $i=1,N$ ), l'équation 1.11 est une équation linéaire en les variables  $u_J$  ( $J=1,N$ ); donc  $N$  équations et  $N$  inconnues ...
4. Solution: Pour visualiser la solution ou la comparer avec une solution analytique, on peut de nouveau reconstruire de la même manière à partir des valeurs moyennées maintenant connues, une solution en chaque point  $x_{(i-1/2)}$

**EXERCICE 1: Ecrire un programme résolvant l'équation du laplacien avec un second membre donné analytiquement et conditions de Dirichlet analytique par la méthode volumes finis décrite ci-dessus. Vérifier que cette méthode est bien d'ordre 2.**

On présente maintenant une méthode générale de reconstruction en 1D

## 1.5 Reconstruction en 1D

**Problème A:** Soit une fonction  $v(x)$  dont les moyennes suivantes sont connues:

$$\bar{v}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} v(\xi) d\xi \quad (1.12)$$

Trouver un polynôme  $p_i(x)$  de degré au plus  $(k-1)$  pour chaque cellule  $I_i$  qui soit une approximation d'ordre  $k$  de la fonction  $v(x)$  dans  $I_i$

$$p_i(x) = v(x) + O(h^k) \quad x \in I_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.13)$$

De tels polynômes donnent une approximation d'ordre  $k$  de  $v(x)$  aux frontières des cellules  $I_i$

$$v_{i+1/2}^- = p_i(x_{i+1/2}) \quad v_{i-1/2}^+ = p_i(x_{i-1/2}) \quad i = 1, \dots, N \quad (1.14)$$

et

$$v_{i+1/2}^- = v(x_{i+1/2}) + O(h^k) \quad v_{i-1/2}^+ = v(x_{i-1/2}) + O(h^k) \quad i = 1, \dots, N \quad (1.15)$$

Remarque: les indices (+), respectivement (-) indique que la valeur au point est défini pour un polynôme dont la définition est basée sur des points supérieurs, resp. (inférieur).

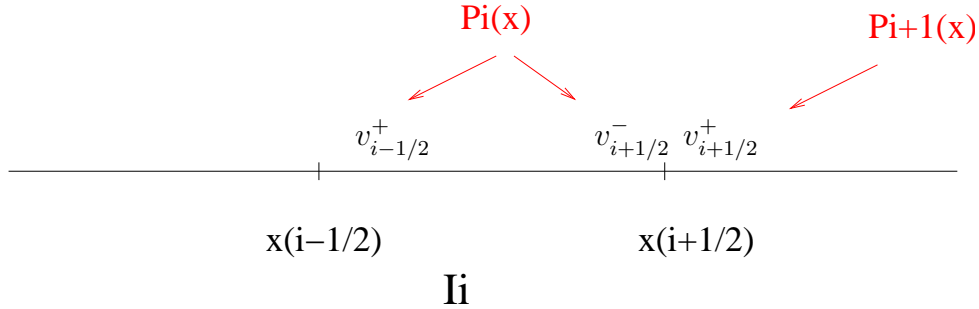


Figure 1.7: Notations

Trouver le polynôme peut se faire de différentes façons:

**Une manière générale est de poser le problème ainsi:**

Connaître un polynôme de degré au plus  $(k-1)$ , c'est connaître  $k$  coefficients, donc il faut  $k$  équations. Il faut donc écrire la moyenne d'un tel polynôme dans  $k$  cellules, l'égaliser aux moyennes données de  $v$ , et résoudre le problème linéaire de dimension  $k$ .

Autrement dit:

On se donne l'intervalle  $I_i$  et l'ordre  $k$ . On choisit des cellules,  $r$  cellules à gauche de  $I_i$ , et  $s$  cellules à droite de  $I_i$  avec

$$r + s + 1 = k$$

Un tel choix est appelé un "stencil" de cellules,  $S(i) = I_{i-r}, \dots, I_i, \dots, I_{i+s}$ .

Il existe un seul polynôme  $p_i$  tel que

$$\frac{1}{h_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} p_i(\xi) d\xi = \bar{v}_j \quad j = i - r, \dots, i + s \quad (1.16)$$

A l'aide d'un développement de Taylor de  $v$  dans  $I_i$ , on montre qu'un tel polynôme est une approximation d'ordre  $k$  de  $v$ , si  $v$  est suffisamment régulier dans  $U = \bigcup_{j=i-r}^{j=i+s} I_j$ . Cette méthode nécessite la résolution d'un problème linéaire de dimension  $k$ .

On présente maintenant une méthode sans résolution de système linéaire.



**Une résolution du Problème A:** Soit

$$V(x) = \int_{x_0}^x v(\xi) d\xi \quad (1.17)$$

Le point  $x_0$  est quelconque (voir plus bas).

$$V(x_{i+1/2}) = \sum_j \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} v(\xi) d\xi = \sum_j \bar{v}_j h_j \quad (1.18)$$

Connaître  $\bar{v}_j$ , c'est connaître  $V$  aux bord des cellules  $I_i$ .

Il existe un unique polynôme  $P$  de degré  $k$  qui interpole  $V(x_{j+1/2})$  pour  $j = i - r - 1, \dots, j = i + s$ ,  
 $x_{j+1/2} = x_{i-r-1/2}, \dots, x_{i+s+1/2}$  avec  $(s+r+1+1) = k+1$  points.

Ce polynôme peu être calculé par une interpolation de Lagrange:

$$P(x) = \sum_{m=0}^k V(x_{i-r+m-1/2}) \prod_{l=0, l \neq m}^k \frac{x - x_{i-r+l-1/2}}{x_{i-r+m-1/2} - x_{i-r+l-1/2}} \quad (1.19)$$

Le polynôme  $p(x) = P'(x)$  est le polynôme cherché. En effet

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} p(\xi) d\xi &= \frac{1}{h_j} (P(x_{j+1/2}) - P(x_{j-1/2})) \\ &= \frac{1}{h_j} (V(x_{j+1/2}) - V(x_{j-1/2})) \text{ par définition de } P \\ &= \frac{1}{h_j} \int_{x_0}^{x_{j+1/2}} v(\xi) d\xi - \int_{x_0}^{x_{j-1/2}} v(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{h_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} v(\xi) d\xi \\ &= \bar{v}_j \end{aligned} \quad (1.20)$$

$P'(x)$  nécessite la connaissance des  $V(x_{j+1/2})$  qui dépendent du choix de  $x_0$ . Pour s'affranchir de cette dépendance, on remarque que

$$\sum_{m=0}^k \prod_{l=0, l \neq m}^k \frac{x - x_{i-r+l-1/2}}{x_{i-r+m-1/2} - x_{i-r+l-1/2}} = 1 \quad (1.21)$$

d'où

$$\sum_{m=0}^k V(x_{i-r-1/2}) \prod_{l=0, l \neq m}^k \frac{x - x_{i-r+l-1/2}}{x_{i-r+m-1/2} - x_{i-r+l-1/2}} = V(x_{i-r-1/2}) \quad (1.22)$$

donc  $p(x) = P'(x) = (P(x) - V(x_{i-r-1/2}))'$  avec

$$P(x) - V(x_{i-r-1/2}) = \sum_{m=0}^k (V(x_{i-r+m-1/2}) - V(x_{i-r-1/2})) \prod_{l=0, l \neq m}^k \frac{x - x_{i-r+l-1/2}}{x_{i-r+m-1/2} - x_{i-r+l-1/2}} \quad (1.23)$$

Par suite

$$P(x) - V(x_{i-r-1/2}) = \sum_{m=0}^k \left( \sum_{j=0}^{m-1} h_{i-r+j} \overline{v_{i-r+j}} \right) \prod_{l=0, l \neq m}^k \frac{x - x_{i-r+l-1/2}}{x_{i-r+m-1/2} - x_{i-r+l-1/2}} \quad (1.24)$$

**Remarque et conclusion:** Pour une approximation unique de  $v(x_{i+1/2})$ , il suffit pour chaque point  $x_{i+1/2}$  d'associer un seul intervalle, et un seul stencil.

## 1.6 Conditions aux limites

On ne s'est pas préoccupé pour l'instant de ce qui se passait aux frontières du domaine. A l'équation 1.4 sont associées des conditions aux limites.

Regardons le traitement des principales conditions aux limites en espace:

### 1.6.1 Condition de flux imposée

C'est la plus simple  $\int_{\Gamma_{I_0}} F(U).dS$  donné. Plus besoin de reconstruction

### 1.6.2 Condition de périodicité

Une technique générale est d'introduire des cellules fictives de part et d'autre du domaine, et poser dans ces cellules fictives des valeurs moyennées égales à celles situées à l'autre extrémité du domaine.

### 1.6.3 Condition de Dirichlet, ou Neumann

$$v(a) = v_a \text{ ou } \frac{\partial v}{\partial x}(a) = g_a$$

Dans le processus de reconstruction, pour un polynôme à définir sur une cellule située sur la frontière, on utilise une reconstruction par résolution d'un système linéaire. On remplace une des équations portant sur la moyenne d'une cellule par l'imposition de la condition sur le polynôme  $p$

$$p(a) = v_a \text{ ou } \frac{\partial p}{\partial x}(a) = g_a$$

Pour des schémas volumes finis d'ordre peu élevé, on utilise de nouveau des cellules fictives dans lesquelles on pose des valeurs moyennées telles que la condition aux limites soit vérifiée.

Exemple 1: pour un schéma d'ordre 2 et une condition de type Dirichlet, on écrit que la valeur moyennée est égale à la valeur Dirichlet

Exemple 2: pour un schéma d'ordre 2 et une condition de type Neumann, on écrit que la valeur moyennée vérifie une relation différentielle par rapport aux valeurs moyennées internes.

On considérera deux type de cellules : des cellules rectangulaires et des cellules triangulaires.

## 1.7 Reconstruction en 2D pour des cellules rectangulaires

Soit un domaine  $[a, b] \times [c, d]$  recouvert par des cellules

$$I_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \quad i = 1, N_x \quad j = 1, N_y$$

$$a = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{N_x+1/2} = b$$

$$c = y_{1/2} < y_{3/2} < \dots < y_{N_y+1/2} = d$$

$$\text{Le centre des cellules } (x_i, y_j) = \left( \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}, \frac{y_{j-1/2} + y_{j+1/2}}{2} \right)$$

$$hx_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} \text{ et}$$

$$hy_j = y_{j+1/2} - y_{j-1/2} \text{ et}$$

$$hx = \max_{1 \leq i \leq N_x} hx_i$$

$$hy = \max_{1 \leq j \leq N_y} hy_j$$

$$h = \max(hx, hy)$$

**Problème B:** Soit une fonction  $v(x, y)$  dont les moyennes suivantes sont connues:

$$\overline{v_{ij}} = \frac{1}{hx_i hy_j} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} v(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.25)$$

Trouver un polynôme  $p_{ij}(x, y)$  de degré au plus  $(k-1)$  pour chaque cellule  $I_{ij}$  qui soit une approximation d'ordre  $k$  de la fonction  $v(x, y)$  dans  $I_{ij}$

$$p_{ij}(x, y) = v(x, y) + O(h^k) \quad (x, y) \in I_{ij}, \quad i = 1, \dots, N_x \quad j = 1, \dots, N_y \quad (1.26)$$

Ces polynômes donneront des approximations de  $v(x, y)$  aux bords des cellules d'ordre  $k$ .

$$v_{i+1/2,y}^- = p_{ij}(x_{i+1/2}, y) \text{ et } v_{i-1/2,y}^+ = p_{ij}(x_{i-1/2}, y) \quad i = 1, \dots, N_x \quad (1.27)$$

$$v_{i+1/2,y}^- = v(x_{i+1/2}, y) + O(h^k) \text{ et } v_{i-1/2,y}^+ = v(x_{i-1/2}, y) + O(h^k) \quad i = 1, \dots, N_x \quad (1.28)$$

$$v_{x,j+1/2}^- = p_{ij}(x, y_{j+1/2}) \text{ et } v_{x,j-1/2}^+ = p_{ij}(x, y_{j-1/2}) \quad j = 1, \dots, N_y \quad (1.29)$$

$$v_{x,j+1/2}^- = v(x, y_{j+1/2}) + O(h^k) \text{ et } v_{x,j-1/2}^+ = v(x, y_{j-1/2}) + O(h^k) \quad j = 1, \dots, N_y \quad (1.30)$$

Connaître un polynôme de degré au plus  $(k-1)$  en 2D, c'est connaître  $k(k+1)/2$  coefficients, donc il faut  $k(k+1)/2$  équations. Il faut donc écrire la moyenne d'un tel polynôme dans  $k(k+1)/2$  cellules, l'égaliser aux moyennes données de  $v$ , et résoudre le problème linéaire de dimension  $k(k+1)/2$ .

Les  $k(k+1)/2$  cellules définissent un stencil noté  $S(i, j)$

**Remarques :**

1. Tout stencil ne donne pas nécessairement un système inversible
2. Si un stencil donne une infinité de solutions, elles ne définiront pas nécessairement une approximation d'ordre  $k$ .

**EXERCICE 2: Reconstruire une polynôme (à 2 variables) d'ordre 1 sur le stencil horizontal**  $I_{i-1,j}, I_{i,j}, I_{i+1,j}$

**Une manière sure :** Utiliser des polynômes dans  $Q^{k-1}$ , produit tensoriel de polynômes 1D.

$$p(x, y) = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} a_{ml} x^m y^l$$

Pour  $I_{ij}$ , on utilise le stencil,  $S(i, j) = I_{ml}, m = i - r, i + k - 1 - r; l = j - s, j + k - 1 - s$

Comme en 1D, on introduit les primitives

$$V(x, y) = \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x v(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

avec

$$V(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) = \int_{y_0}^{y_{j+1/2}} \int_{x_0}^{x_{i+1/2}} v(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

De même on définit un polynôme  $P(x,y)$  qui interpole  $V$  en tout point frontière du stencil.

Le polynôme cherché est  $p(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x \partial y}$

**EXERCICE 3: Reconstruire une polynôme d'ordre 1 produit tensoriel de polynômes 1D, sur un maillage cartésien régulier.**

**Remarques :** Utiliser des polynômes dans  $Q^{k-1}$  est un peu excessif alors que  $P^{k-1}$  suffirait. Mais cette construction est toujours sûre.

## 1.8 Reconstruction en 2D pour des cellules triangulaires

On aborde un domaine encore peu théorisé.

Connaître un polynôme de degré au plus  $(k-1)$  en 2D, c'est connaître  $k(k+1)/2$  coefficients, donc il faut  $k(k+1)/2$  équations.

Il faut donc écrire la moyenne d'un tel polynôme dans  $k(k+1)/2$  cellules, l'égaliser aux moyennes données de  $v$ , et résoudre le problème linéaire de dimension  $k(k+1)/2$ .

Les  $k(k+1)/2$  cellules définissent un stencil noté  $S(i, j)$

Deux méthodes:

- On choisit un stencil. S'il définit un polynôme unique, on le garde, sinon on regarde un autre stencil, etc ...
- On définit un stencil surdimensionné, et on calcule un polynôme de degré  $k-1$  qui vérifie l'égalité des moyennes sur chacune des cellules au sens des moindres carrés. Si le stencil contient  $M > k(k+1)/2$  cellules, on note

$$\overline{p}_{ml} = \frac{1}{hx_m hy_l} \int_{y_{l-1/2}}^{y_{l+1/2}} \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.31)$$

On pose  $F(p) = \sum_{ml} (\overline{p}_{ml} - \overline{v}_{ml})^2$  et ceci pour  $ml$  décrivant le stencil.

$F(p)$  est une expression qui dépend de façon quadratique des  $k(k+1)/2$  coefficients de  $p$ .

Vérifier l'égalité des moyennes sur chacune des cellules au sens des moindres carrés consiste à minimiser  $F(p)$  par rapport aux coefficients de  $p$ . Donc à résoudre le système linéaire  $\frac{\partial F(p)}{\partial a_{ml}} = 0$

**Remarques et conclusion** : De la même façon que pour le 1D, pour avoir une définition unique sur les frontières, il suffit à chaque  $\Gamma_{IJ}$  représentant l'intersection de 2 cellules, d'associer une cellule et un stencil.

Pour calculer le flux à travers les bords des cellules (segments), il suffit de faire une intégration numérique d'ordre  $k$  (intégration de Gauss, ...), la fonction étant connue sur tout le segment.

## 1.9 Conditions aux limites

En général, l'imposition des conditions aux limites se fait grâce à l'utilisation de cellules fictives dans lesquelles des valeurs moyennées sont imposées telles que la condition aux limites soit vérifiée. Le coût des schémas volumes finis multi-dimensionnel est tel que l'on voit rarement des codes utilisant des codes d'ordre supérieur à 2. Dans ce cas, la moyenne coïncide (à l'ordre 2) avec la valeur au centre des mailles.

Un théorème de Gustavsson montre qu'imposer des conditions à l'ordre du schéma courant diminué de 1 ne change pas l'ordre global du schéma. Pour un schéma d'ordre 3, on impose souvent des conditions d'ordre 2.