UNIVERSITE PARIS 13 Année 2007-2008

MACS 2

**Mécanique des Solides-Feuille TD 1**

## I) Flexion d'une poutre

Une pièce mécanique constitué d'un materiau élastique , homogène et isotrope (constantes de Lamée $\lambda$ et $\mu$) est en équilibre avec des forces volumiques négligeables. La pièce occupe un domaine cylindrique $\Omega = ]-h,h[\times]-k,k[\times]0,L[$ de section $\omega = ]-h,h[\times]-k,k[$. La surface laterale $\partial\omega \times [0,L]$ est libre des contraintes. Sur les bases $x_3 = 0, x_3 = L$ les contraintes tangentielles sont nulles et le deplacement normale est imposé : $u_n = 0$ sur $\omega \times \{0\}$, $u_n = -ALx_1$ sur $\omega \times \{L\}$.

**1)** *Mise en équation* - Il s'agit d'écrire les équations, leur interprétation physique, leurs limites d'applicabilité et les conditions aux bords.

**2)** *Formulation variationnelle.* Trouver l'ensemble des deplacements cinematiquement admissibles $\mathcal{U}_{ad}$ et l'expression de la fonctionnelle d'energie élastique (potentielle) $J(v)$ a minimiser sur $\mathcal{U}_{ad}$.

**3)** *Simplification du problème* . Montrer que l'ensemble :

$$\mathcal{W} = \{v_{ab} = (\frac{Aa}{2}x_3^2 + \frac{b}{2}(x_1^2 - x_2^2); bx_1x_2; -Ax_1x_3);\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

est inclus en $\mathcal{U}_{ad}$ et calculer $\varepsilon(v_{ab})$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

**4)** Soit $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $j(a,b) := J(v_{ab})$. Calculer $j(a,b)$ afin de trouver $(a^*; b^*)$ qui minimise $j$ sur $R^2$, i.e. $j(a^*, b^*) \leq j(a,b)$ pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.

**5)** Montrer que $u = v_{a^*b^*}$ est une solution du problème mécanique.

**6)** Le problème mécanique admet-il une solution unique ? Justifier.

**7)** On suppose que la limite d'élasticité du matériau est gouvernée par le critère de Von-Mises ($|\sigma^D| \leq \tau_0$ ). Déterminez la valeur maximale du $A$ que peut supporter la poutre sans qu'aucune irréversibilité n'apparaisse.

## II) Déformation d'une pièce

On se propose d'étudier la déformation statique d'une pièce entre deux plaques parallèles planes et rigides. La pièce, qui est rapportée à un système d'axes orthonormés $Ox_1x_2x_3$, est infinie dans la direction verticale $Ox_3$ et a une section rectangulaire $\Omega = ]0,a[\times]0,b[$ dans le plan $Ox_1x_2$. Les faces $x_1 = 0, x_1 = a$ sont en contact sans frottement avec deux plaques parallèles rigides (déplacement normal nul et contraintes tangentielles nulles). On impose à la face $x_2 = b$ un déplacement tangentiel $(0, 0, B)$ et une contrainte normale $-S(\theta)$ où $B = B(\theta, x_1)$ et $S(\theta) > 0$ sont donnés et $\theta$ est un paramètre de chargement. La face $x_2 = 0$ fixée (le déplacement est nul). Les forces volumiques (le pesanteur) sont $(0, 0, -g\rho)$ où $\rho > 0$ est la densité de masse. Le matériau est supposée élastique linéaire, homogène et isotrope.

**1)** *Mise en équation* - Il s'agit d'écrire les équations, leur interprétation physique, leurs limites d'applicabilité et les conditions aux bords.

**2)***Simplification du problème* - Il s'agit d'utiliser l'hypothèse $u_1 = 0, u_2 = u_2(\theta, x_2), u_3 = u_3(\theta, x_1, x_2)$, d'écrire le tenseur de déformation linéarisé, l'interpretation des ses composantes et le tenseur de contraintes afin de déduire le problème simplifié.

**3)** Trouver les expressions du déplacement $u_2$ et de la contrainte normale sur la face $x_1 = a$.

**4)** *Formulation variationnelle.* Montrer que $u_3(\theta)$ est solution d'un problème variationnel. Trouver la fonctionnelle d'energie et d'étudier l'unicité de la solution.

**5)** *Approximation par la méthode des éléments finis.* Il s'agit d'utiliser la méthode de Galerkin pour le problème variationnel et un espace de dimension finie construit avec la méthode des éléments finis P1. Elaboration d'un code FreeFem++ afin d'obtenir la solution approximative.

**6)** *Présentation des résultats numériques* - Il s'agit d'une présentation graphique très suggestive, des déplacements, des déformations, des contraintes et du module de leur déviateur.

Supposons dans ce qui suit que le pesanteur est négligeable ($g\rho = 0$) et $B(\theta, x_1) = \theta cos(\frac{\pi x_1}{a})$, $S(\theta) = \theta S_0$.

**7)** Trouver l'expression analytique du déplacement $u_3$ et les forces qui agissent sur la surface $x_2 = 0$. Comparer avec la solution approchée obtenue avec le code FreeFem++.

**8)** Calculer $T > 0$ le plus grand pour lequel pour $0 < \theta < T$ le comportement du materiau reste élastique suivant le critére de von Mises ($|\sigma^D| < \tau_0$). Trouver $(x_1, x_2)$ de $[0, a] \times [0, b]$ où la condition de plasticité est satisfaite pour $\theta = T$.

### III) Ecrasement d'un lopin

On se propose d'étudier la déformation d'une pièce élastique (lopin) entre deux presses parallèles planes et rigide. Le lopin, qui est rapporté à un système d'axes orthonormés $Ox_1x_2x_3$, est infini dans la direction $Ox_3$ et a une section rectangulaire $]-a, a[\times]-b, b[$ dans le plan $Ox_1x_2$. La pièce est supposée homogène et isotrope. Les faces $x_1 = -a$ et $x_1 = a$ sont libres de contraintes. On impose à la face $x_2 = b$ (resp. $x_2 = -b$) un déplacement $(0, -U, 0)$ (resp. $(0, U, 0)$) où $U$ est donné. On néglige les forces volumiques (le pesenteur).

**1)** *Mise en équation* - Il s'agit d'écrire les équations, leur interprétation physique, leurs limites d'applicabilité et les conditions aux bords.

**2)** *Simplification du problème* -Il s'agit d'utiliser l'hypothèse des déformations planes et d'écrire le problème simplifié.

**3)** *Formulation variationnelle.* Il s'agit te trouver la formulation variationnelle en déformations planes et d'étudier l'unicité de la solution.

**4)** *Approximation par la méthode des éléments finis.* Il s'agit d'utiliser la méthode de Galerkin pour le problème variationnel et un espace de dimension finie construit avec la méthode des éléments finis P1. Elaboration d'un code FreeFem++ afin d'obtenir la solution approximative.

**5)** *Présentation des résultats numériques* - Il s'agit d'une présentation graphique très suggestive, des déplacements, des déformations, des contraintes et du module de leur déviateur.

**6)** Calculer la force normale résultante exércée sur les faces $x_2 = \pm b$ pour differents rapports $a/b$ et $U_{max}$ admisible pour lequel le comportement du materiau reste élastique suivant le critére de von Mises ($|\sigma^D| < \ \tau_0$) .

## IV) Torsion d'un arbre cylindrique.

On se propose d'étudier la déformation d'une pièce (arbre) cylindrique. L'arbre qui est rapporté un système d'axes orthonormés $Ox_1x_2x_3$ a une section droite $\omega$ et occupe une région $\Omega = \omega\times]0, L[$ de $R^3$. Le matériau est supposé élastique linéaire (coéfficients de Lamé $\lambda, \mu$), homogène et isotrope. Nous imposons une rotation nulle de la face $x_3 = 0$ et une rotation d'angle $aL$ de la face supérieure $x_3 = L$ (i.e. le déplacement tangentiel est $(-aLx_2, aLx_1, 0)$ pour $x_3 = L$ et $(0, 0, 0)$ pour $x_3 = 0$). De plus nous imposons des efforts normaux nuls sur ces deux faces. La surface laterale du cylindre n'est soumise aucun effort et les forces volumiques (le pesanteur) sont supposées négligeables. Il faut passer par les étapes suivantes :

**1)** *Mise en équation* - Il s'agit d'écrire les équations, leur interprétation physique leurs limites d'applicabilité et les conditions aux bords.

**2)** *Simplification du problème* - Il s'agit d'utiliser l'hypothèse $u_1 = -ax_3x_2, u_2 = ax_3x_1, u_3 = av(x_1, x_2)$, d'écrire le tenseur de déformation linéarisé et le tenseur de contraintes afin de déduire un problème aux limites pour v. Etudier l'unicité du $v$.

**3)** Etudier l'existence de $w : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} = a(-x_2 + \frac{\partial v}{\partial x_1}), \ \ \frac{\partial w}{\partial x_1} = -a(x_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2}).$$

Démontrer que $-\triangle w = 2a$ dans $\omega$ et $w = const$ sur la frontière de $\omega$.

**4)** Determiner $w$ dans le cas d'une section circulaire $\omega = \{(x, y); x^2 + y^2 < R^2\}$. Trouvez les contraintes tangentielles qui agissent sur la face $x_3 = L$.

**5)** Calculer $a_{max} > 0$ le plus grand pour lequel le comportement du materiau est élastique (les contraintes sont dans l'intérieur de la surface de plasticité de Von-mises) en chaque point de $\Omega$.