Distributions et applications.
S 1925

Olivier Lafitte[1][2]

[1]Université de Paris XIII, Institut Galilée, 93 430 Villetaneuse Cedex
[2]DM2S, Commissariat à l'Energie Atomique, Centre d'études de Saclay, 91 Gif sur Yvette

Contents

Chapter 0

Quelques prérequis

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats et méthodes de l'Analyse et de la géométrie différentielle que nous utiliserons dans la suite du cours. Ces notions ne sont pas liées au cours de théorie des distributions, et nous souhaitons les présenter indépendamment. On réfère cependant à d'autres cours ou ouvrages pour ces notions. Je remercie en particulier F. Maisonneuve [9] et S. Kokh [7] pour leurs compléments à ce chapitre.

0.1 Intégrabilité

On rappelle que deux types d'intégrale ont été introduits classiquement: l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesque.

Une fonction intégrable au sens de Riemann est une fonction que l'on peut approcher en moyenne et encadrer par des fonctions en escalier. Une fonction en escalier est la donnée d'une subdivision de I en intervalles ($I = \cup_{n=1}^{N}[a_n, a_{n+1}]$ et d'une série de N valeurs réelles c_n (une fonction en escalier g est alors la fonction égale à c_n sur l'intervalle $]a_n, a_{n+1}]$ pour tout n, presque partout). On définit alors $I_I(g) = \sum_{n=1}^{N} c_n(a_{n+1} - a_n)$.

Définition 0.1 *On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur un intervalle I si et seulement si on a (sur I)*

$$sup\{I_I(g), g \text{ fonction en escalier }, g \leq f\} = inf\{I_I(g), g \text{ fonction en escalier }, g \geq f\}.$$

L'intégrale de f au sens de Riemann est alors ce nombre. On rappelle que si f est continue, alors $\int_a^x f(t)dt$ est une fonction de classe C^1, dont la dérivée est f.

De même, on définit l'intégrale au sens de Lebesque. Pour cela, il est nécessaire d'introduire une structure sur $\mathbb{R}$:

Définition 0.2 *On définit une mesure sur $\mathbb{R}$ comme étant une fonction μ dénombrablement additive sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour toute famille d'éléments deux à deux disjoints A_n d'une tribu de $\mathbb{R}$ on a $\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)$).*

La mesure de Lebesgue est alors la plus simple qui soit: c'est la mesure qui associe à un intervalle de $\mathbb{R}$ sa longueur. On la note traditionnellement λ. On peut alors étudier les fonctions $\lambda-$mesurables:

Définition 0.3 *On dit que f est mesurable d'un ensemble $(E, \mathcal{B})$ dans $(E', \mathcal{B}')$ si l'image réciproque de tout élément de la tribu $\mathcal{B}'$ par f est dans la tribu $\mathcal{B}$.*

On peut rapprocher cette définition de la définition de la continuité (l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert).
La définition d'une fonction intégrable au sens de Lebesgue peut alors être donnée dans des espaces mesurables très généraux. En suivant le cours de Maths 2 (F. Maisonneuve, [9]) on définit d'abord l'intégrale d'une fonction positive. Pour cela, on définit l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies d'indicatrices d'ensembles mesurables, noté $\mathcal{E}^+$ (et pour les éléments de cet espace vectoriel on peut calculer l'intégrale comme combinaison linéaire des mesures des dits ensembles). Ces fonctions s'appellent des fonctions étagées.
L'intégrale d'une fonction f mesurable positive est définie alors par

$$\int f d\mu = \sup_{\phi \in \mathcal{E}^+, \phi \leq f} \int \phi d\mu.$$

Si cette valeur est finie, on dit que f est intégrable.
Cette notion d'intégrale permet d'obtenir directement le théorème de convergence monotone:

Théorème 0.1 *Soit f_n une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant simplement vers f.*
i) La fonction f est mesurable positive
ii) On a $lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu = \int (lim_{n \to +\infty} f_n) d\mu$.

On remplace alors la définition de l'intégrale d'une fonction positive par la définition suivante, déduite du théorème de convergence monotone:

Proposition 0.1 *$\int f d\mu = lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu$ pour toute suite f_n de fonctions croissantes tendant vers f (suites adaptées)*

On peut alors définir l'intégrale de f pour une fonction quelconque. Pour cela, on introduit $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$.
Remarquons que $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Ainsi, on dit que la fonction f est intégrable si f^+ et f^- sont intégrables, c'est à dire si $|f|$ est intégrable. Dans ce cas, on a

$$\int f d\lambda =_{def} \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda.$$

On rappelle que si $f - g$ est positive, alors $\int f - g d\mu = 0 \Rightarrow f = gpp$.

De ces définitions, on déduit des théorèmes importants:

Théorème 0.2 *(Beppo-Levi) Pour que la limite f d'une suite croissante de fonctions f_n (de sorte que $f_{n+1} \geq f_n$ pour tout n) soit intégrable, il faut et il suffit que la suite des nombres $\int f_n d\mu$ soit majorée, et on a alors $\int f d\lambda = lim_{n \to +\infty} \int f_n d\lambda$.*

Théorème 0.3 *(convergence dominée)*

Si f_n est une suite de fonctions intégrables, uniformément majorée par une fonction g intégrable ($|f_n| \leq g$), telle que f_n converge presque partout:
c'est à dire l'ensemble des points x tels que • soit le nombre des valeurs de n tels que $f_n(x)$ n'est pas défini est infini • soit la suite $f_n(x)$ est non convergente pour les n où elle est définie (est de mesure nulle) vers f, alors f est intégrable et $\int f d\mu$ est la limite de $\int f_n d\mu$.

On a une version de ce résultat, énoncé ci-dessus pour une suite, pour des fonctions $f(x,t)$ avec

$$f(x,t) \to f(x) \text{ si } t \to t_0$$

telle que $|f(x,t)| \leq g(x)$ et g intégrable, alors

$$\int f(x,t) d\lambda(x) \to_{t \to t_0} \int f(x) d\lambda(x).$$

Ce résultat permet d'énoncer un résultat de dérivation sous le signe intégrale:

Théorème 0.4 *On suppose que $f(x,t)$ est dérivable par rapport à t au voisinage de t_0, pour presque tout x, et on suppose que $\partial_t f(x,t)$ est intégrable, et que de plus $|\partial_t f(x,t)| \leq g(x)$, où g est intégrable. Alors $\int f(x,t) d\lambda(x)$ est dérivable en t_0 et sa dérivée est $\int \partial_t f(x,t_0) dx$.*

On utilise alors la mesure de Lebesgue qui est la mesure dx dans ce qui suit. D'autres mesures peuvent être importantes:
• les mesures à poids $d\mu(x) = h(x)dx$, $h > 0$ qui vérifient

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f(x) h(x) dx.$$

• les mesures discrètes $d\mu = \sum \alpha_j \delta_{a_j}$ telles que

$$\int f d\mu = \sum \alpha_j f(a_j).$$

Dans le cadre de la mesure de Lebesgue, on définit l'espace des fonctions intégrables L^1 comme l'espace des (classes d'équivalence[1]) de fonctions telles que $\int |f(x)| dx < +\infty$. Lorsqu'on considère un élément de L^1, on considère un représentant de la classe, c'est à dire on utilise f et g dans la même classe implique que $f = g$ presque partout, donc $\int f dx = \int g dx$. Dans l'espace L^1 on a alors $\int |f| dx = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (en terme de classes d'équivalence).
Les définitions précédentes s'étendent à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, qui se définit sur la tribu des boréliens engendrée sur $\mathbb{R}^d$. La mesure d'un produit tensoriel de boréliens est alors le produit des mesures des boréliens. En revanche, on ne peut pas construire la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^d$, on sait qu'elle contient par exemple les intersections dénombrables de réunions dénombrables de pavés de $\mathbb{R}^d$, mais il y en a beaucoup plus (au sens des dimensions d'espaces).
Un espace fonctionnel souvent utilisés dans ce cours est l'espace L^1_{loc} des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$ ou un ouvert de $\mathbb{R}$:

Définition 0.4 *On dit que f est localement intégrable si et seulement si pour tout compact K la fonction $f 1_K$ est dans L^1.*

Un outil principal de ce cours est le théorème de Fubini:

Théorème 0.5 *1) On suppose que f et g sont deux fonctions respectivement de $L^1(\mathbb{R}^p)$ et $L^1(\mathbb{R}^q)$. La fonction $(x,y) \to f(x)g(y)$ est élément de $L^1(\mathbb{R}^{p+q})$ et on a*

[1] pour la relation d'équivalence $f \simeq g$ lorsque $f = g$pp

$$\int f(x)g(y)dxdy = \int [\int g(y)dy].f(x)dx = \int [\int f(x)dx].g(y)dy.$$

2) On suppose que f est un élement de $L^1(\mathbb{R}^{p+q})$. Alors les fonctions suivantes sont définies presque partout

$$f_1(x) = \int f(x,y)dy, f_2(y) = \int f(x,y)dx$$

et sont respectivement dans $L^1(\mathbb{R}^p)$ et dans $L^1(\mathbb{R}^q)$.

On a la relation

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy = \int f(x,y)dxdy.$$

De cette formule de Fubini, on passe à la notion de produit de convolution de deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$, qui est une fonction de $L^1(\mathbb{R}^d)$:

Définition 0.5 *Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$. La fonction $(x,y) \to f(y)g(x-y)$ est un élément de $L^1(\mathbb{R}^{2d})$ et le produit de convolution de f et de g, noté $(f \star g)(x)$ est*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy.$$

Quelques propriétés claires

Proposition 0.2 *1) On a $f \star g = g \star f$.*
2) On a $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\int (f \star g)(x)dx = \int f(y)g(x-y)dxdy = (\int f(x)dx)(\int g(z)dz)$.

D'autres propriétés sont liées à la dérivabilité, et peuvent être résumées en disant que le produit de convolution a au moins la régularité de la plus régulière des fonctions que l'on convolue.

Proposition 0.3 *Soit f de classe C^1 telle que f et f' sont dans L^1, et $g \in L^1$, g bornée. Alors $f \star g$ est de classe C^1 et on a $(f \star g)' = f' \star g$.*

Dans ce cours, on se restreindra souvent aux produits de convolution lorsque une des fonctions est continue à support compact dans $\mathbb{R}^d$ (donc par uniforme continuité elle est bornée).
Des espaces ont un rôle important dans les applications de la théorie des distributions: les espaces L^p ($f \in L^p$ ssi $|f|^p \in L^1$). On a d'ailleurs l'inégalité de Holder (généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz):

$$\int fg \leq (\int f^p)^{\frac{1}{p}} (\int f^q)^{\frac{1}{q}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Un autre des outils supposés connus avant de commencer ce cours est la transformée de Fourier usuelle:

Définition 0.6 *Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R}^d)$. La fonction*

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-ix.\xi}dx$$

est bien définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, et on a

$$||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_{L^1}.$$

Nous donnons aussi des rappels de différentiation:

Définition 0.7 *On appelle dérivée partielle de $f \in C^m(\mathbb{R}^d)$ par rapport au multi-indice de dérivation $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_d)$, α_j entier, $\alpha_1 + ... + \alpha_d \leq m$ et on note $\partial^\alpha_{x^\alpha} f(x)$ cette dérivée. La longueur de α est $|\alpha| = \alpha_1 + .. + \alpha_d$.*

On a la formule de Leibnitz

$$\partial^\alpha_{x^\alpha}(fg)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} C^\beta_\alpha \partial^\beta_{x^\beta} f \partial^{\alpha-\beta}_{x^{\alpha-\beta}} g$$

où $\beta \leq \alpha$ se traduit par $\beta_j \leq \alpha_j$ pour tout j, et $C^\beta_\alpha = C^{\beta_1}_{\alpha_1} C^{\beta_2}_{\alpha_2} ... C^{\beta_d}_{\alpha_d}$.

On rappelle des notions usuelles liées aux variétés

Proposition 0.4 *Soit V une variété de classe C^1 localement résoluble, c'est à dire qu'il existe une fonction Φ de $B(x'_0, r)$, dans un voisinage de x^0_n de $\mathbb{R}$, $\Phi(x'_0) = x^0_n$ telle que l'équation de $V \cap B(x_0, r)$ est $x_n = \Phi(x')$.*

L'hyperplan tangent à V en x_0 a pour équation

$$x_n - x^0_n = \nabla\Phi(x'_0)(x' - x'_0).$$

Un vecteur normal unitaire à la variété en x_0 est le vecteur

$$\vec{n} = \frac{(\nabla\Phi(x'_0), -1)}{(||\nabla\Phi(x'_0)||^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si la variété est localement résoluble, alors le vecteur normal unitaire sortant à $\Omega = \{(x', x_n), x_n < \Phi(x')\}$ est le vecteur $-\vec{n}$.

Preuve On considère un point situé sur la normale $\vec{n}$ issue de $(x'_0, \Phi'(x'_0))$. Ce point est $(y', y_d) = (x'_0 + \frac{\epsilon\nabla\Phi(x'_0)}{(||\nabla\Phi(x'_0)||^2+1)^{\frac{1}{2}}}, \Phi(x'_0) - \frac{\epsilon}{(||\nabla\Phi(x'_0)||^2+1)^{\frac{1}{2}}})$. On forme alors

$$A = \Phi(y') - y_d = \Phi(x'_0 + \frac{\epsilon\nabla\Phi(x'_0)}{(||\nabla\Phi(x'_0)||^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}) - \Phi(x'_0) + \frac{\epsilon}{(||\nabla\Phi(x'_0)||^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le développement limité de cette expression en ϵ donne $A = \epsilon + o(\epsilon)$ lorsque Φ est de classe C^1. Ainsi ce terme est positif pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit (de sorte que $|\frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \leq \frac{1}{2}$.

La dernière notion faisant l'objet de notre étude est la dérivée de fonctionnelles (et non de fonctions). Une fonctionnelle J est une application d'un espace de Hilbert H dans $\mathbb{R}$ (pas forcément de dimension finie)

Définition 0.8 *On dit que J est différentiable au sens de Fréchet en u_0 si il existe une forme linéaire continue $L : w \to (L, w)$ sur l'espace de Hilbert H telle que*

$$J(u_0 + w) = J(u_0) + (L, w) + o(w)$$

où $o(w)$ est une fonctionnelle telle que

$$\frac{o(w)}{||w||} \to 0, ||w|| \to 0.$$

La dérivée au sens de Fréchet, quand elle existe, peut être obtenue grâce à la dérivée de Gâteaux, sous la forme

$$(L, w) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u_0 + \epsilon w) - J(u_0)}{\epsilon}.$$

Exemple On considère $u \in H^1([0,1]) = \{u \in L^2([0,1]), u' \in L^2([0,1])\}$ qui est un espace de Hilbert. On introduit $J(u) = \int_0^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx$ (qui est la longueur associée à la courbe $y = u(x)$ entre les points $(0, u(0))$ et $(1, u(1))$ du plan). De l'inégalité $|u(x) - u(y)| \leq |\int_x^y u'(t)dt| \leq \sqrt{|x-y|} |\int_x^y (u')^2 dt|^{\frac{1}{2}}$, on déduit que u est continue. On a alors

$$J(u+w) - J(u) = \int_0^1 (\sqrt{1 + (u')^2 + 2u'w' + (w')^2} - \sqrt{1 + (u')^2}) dx = \int_0^1 \frac{2u'w' + (w')^2}{\sqrt{1+(u')^2+2u'w'+(w')^2} + \sqrt{}}$$

dont on déduit

$$|J(u+w) - J(u) - \int_0^1 w' \frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} dx| \leq C \int_0^1 (w')^2 dx.$$

Ceci permet d'obtenir la dérivée de Fréchet, qui est bien une forme linéaire continue puisque $\frac{(u')^2}{1+(u')^2} \leq 1$ pp donc en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a $(L, w) \leq ||w'||_{L^2}$.

Les notions introduites dans ce chapitre seront utilisées dans les chapitres suivants.

Le chapitre 1 de l'édition 2005 de ce cours (que je conserve dans l'édition 2006) présente une introduction aux distributions vus à partir de l'analyse de Fourier et des espaces de Sobolev, présentation qui suffit pour l'analyse des problèmes d'équations aux dérivées partielles usuelles. En revanche, on s'apercevra que cette présentation amène à des précautions oratoires et des difficultés de raisonnement qui seront totalement résolues par l'introduction générale de la théorie des distributions, qui fait l'objet du chapitre 2. Lorsqu'une démonstration est nécessaire dans le chapitre 1 et qu'elle est présentée dans un des chapitres suivants, nous renvoyons le lecteur à ce chapitre.

Chapter 1

Introduction aux espaces de Sobolev

Il est parfois nécessaire de s'affrancir du cadre des fonctions de classe C^1 et C^n en général pour la résolution de problèmes de la physique. Le problème le plus classique a été introduit dans la théorie du potentiel électrostatique au XIXème siècle par Dirichlet, et des observations ont été faites par Riemann. il s'agit du problème de minimisation de l'énergie électrostatique en présence d'une densité de charge f. Cette densité de charge, on la suppose dans notre cadre dans $L^1(\Omega)$ (de sorte que sa contribution totale sur Ω soit finie) et pas forcément continue. Ceci permet de considérer une charge localisée sur une petite partie de l'ouvert.

1.1 Problème de Dirichlet

Le problème consiste à minimiser la fonction du potentiel U suivante

$$J(U) = \tfrac{1}{2} \int_\Omega \vec{E}^2 dx - \int_\Omega f(x) U(x) dx$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique, relié à U par $\vec{E} = -\nabla U$. On suppose que le potentiel U vérifie la condition $U|_{\partial\Omega} = 0$ et que U est de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$ (afin de pouvoir calculer $J(U)$).
a) Il est facile de voir que si U_0 est une solution de classe $C^1(\bar{\Omega})$, alors (voir chapitre 7)

$$\forall w \in C^(\bar{\Omega}), w|_{\partial\Omega} = 0, \int \nabla U_0(x) \nabla w(x) = \int f(x) w(x) dx.$$

b) Si, de plus, U_0 est de classe $C^2(\bar{\omega})$, on trouve que U_0 vérifie nécessairement, par intégration par parties

$$-\Delta U_0(x) = f(x), \forall x \in \Omega.$$

Il vient alors que si f est dans L^1 et n'est pas continue, la solution de ce problème n'est pas de classe C^2.

L'exemple de la dimension 1. On considère

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x)dx.$$

Le cas $f(x) = x^{-\frac{5}{4}}$ peut être traité: en effet la fonctionnelle J (des fonctions de classe C^1 dans $\mathbb{R}$) est bien définie, car si u est de classe C^1 et est nulle en 0 et en 1, alors $u(x) = x\int_0^1 u'(xt)dt$, donc

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 dx - \int_0^1 x^{-\frac{1}{4}} \int_0^1 u'(xt)dtdx.$$

Comme u' est continue et que $x^{-\frac{1}{4}}$ est dans L^1, cette intégrale existe. D'autre part, dans le cas où f est dans L^1, on peut définir $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ qui est une fonction continue par le théorème de la convergence dominée. **Mais** g n'est pas une fonction dérivable. Si f est continue, alors g est dérivable, et

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 dx + \int_0^1 gu'dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'+g)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 g^2 dx$$

d'où on déduit que $J(u)$ est minorée. Dans l'exemple que nous avons considéré $f(x) = x^{-\frac{5}{4}}$ (fonction non continue et non dans L^1) on remarque que

$$\int_\epsilon^1 f(x)u(x)dx = \int_\epsilon^1 (-4x^{-\frac{1}{4}})'u(x)dx = -4u(1) + 4\epsilon^{-\frac{1}{4}}u(\epsilon) + \int_\epsilon^1 4x^{-\frac{1}{4}}u'(x)dx$$

utilisant u' continue et $u(0) = u(1) = 0$ on trouve que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 f(x)u(x)dx = \int_0^1 4x^{-\frac{1}{4}}u'(x)dx.$$

On a donc

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x) - 4x^{-\frac{1}{4}})^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 (4x^{-\frac{1}{4}})^2 dx \geq -8.$$

La fonctionnelle est donc minorée par -8. Si on considère la fonction $u_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\frac{16}{3}x^{\frac{3}{4}} + A_\varepsilon, x \geq \varepsilon \\ A_\varepsilon x, x \leq \varepsilon \end{cases}$ cette fonction est de classe C^1 pour $A_\varepsilon =$, à cause des conditions aux limites, et on voit que $J(u_\varepsilon) \to -8$. L'inf de J sur les fonctions de classe C^1 nulles au bord est donc -8. D'autre part, si ce minimum est atteint $J(u) = -8$ donc $u'(x) = 4x^{-\frac{1}{4}}$, soit $u(x) = -\frac{16}{3}x^{\frac{3}{4}}$, qui n'est pas dans C^1. Plus précisément, en tout point de $]0,1]$, on voit que necessairement $u'' = x^{-\frac{5}{4}}$, donc $u = Ax + B - \frac{16}{3}x^{\frac{3}{4}}$, avec $B = 0$ et $A = -\frac{16}{3}$. Cette fonction ci n'est pas non plus un minimum dans C^1 de J, donc J n'a pas de minimum dans les fonctions C^1.

1.2 Dérivée faible d'une fonction de L^2

On considère

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 dx - \int_0^1 x^{-\alpha}u(x)dx$$

pour $u \in C^1([0,1])$, $u(0) = u(1) = 0$. La fonctionnelle J_α est définie pour $\alpha < 2$. En effet, sachant que $u(x) = xv(x)$, on trouve

$$J_\alpha(u) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 dx - \int_0^1 x^{1-\alpha} v(x)dx$$

où v est continue bornée. Il suffit alors que $x^{1-\alpha}$ soit intégrable sur $[0,1]$, soit $2-\alpha > 0$. D'autre part, la méthode précédente permet d'écrire

$$\int_\epsilon^1 x^{-\alpha} u(x)dx = [\tfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}u(x)]_\epsilon^1 - \int_0^1 \tfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}u'(x)dx.$$

Passant à la limite en ϵ, utilisant $u(x) = xv(x)$ on trouve

$$J_\alpha(u) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 dx + \int_0^1 \tfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}u'(x)dx$$

On a donc

$$J_\alpha(u) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (u' + \tfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha})^2 dx - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{(1-\alpha)^2(2-\alpha)}$$

donc la fonctionnelle est minorée. On a donc fait le calcul général pour $\alpha < 2$.
On contrôle alors que, pour $U = u'$,

$$J_\alpha(u) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (U^2 + \tfrac{2x^{1-\alpha}}{1-\alpha}U)dx.$$

On note que, pour $\alpha < 2$

$$\begin{aligned} J_\alpha(u) \quad & \leq \tfrac{1}{2}\int_0^1 U^2 dx + (\int_0^1 (\tfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha})^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_0^1 U^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \tfrac{1}{2}\int_0^1 U^2 dx + (\tfrac{1}{(3-2\alpha)(1-\alpha)^2})^{\frac{1}{2}}(\int_0^1 U^2 dx)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Cette expression est donc bien définie, pour $U \in L^2$, pour $3-2\alpha > 0$. On utilise le fait que L^2 **est un espace complet** et on considère une suite U_n de fonctions continues d'intégrale nulle qui tend vers U dans L^2 d'intégrale nulle. Alors $J_\alpha(U_n)$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et cette limite est

$$J_\alpha(u) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (U^2 + \tfrac{2x^{1-\alpha}}{1-\alpha}U)dx.$$

On a donc restreint les conditions sur u (qui maintenant est telle que u' est la limite dans L^2 d'une suite u'_n de fonctions telles que $u'_n(0) = u'_n(1) = 0$). La fonctionnelle est donc minorée, ainsi l'inf existe. Soit u_n une suite telle que $J(u_n)$ tend vers l'inf. On en déduit que

$$\int_0^1 (u'_n + \tfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha})^2 dx$$

admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, donc $u'_n + \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ admet une limite v dans L^2, donc u'_n admet une limite dans L^2.
Le cadre naturel pour passer à la limite pour chercher l'inf de la fonctionnelle est $U \in L^2$. On sait que $u_n(0) = u_n(1) = 0$, on trouve $\int_0^1 u'_n(x)dx = 0$.

Si on fait un calcul formel, on trouve que la condition pour que u_0 soit solution du problème de minimisation est alors

$$-u_0'' = x^\alpha,$$

soit $(u_0 + \frac{x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)})'' = 0$, donc

$$u_0(x) + \frac{x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)} = Ax + B.$$

Dans le cas où $\alpha < \frac{3}{2}$, on trouve $B = 0$ et $A = -\frac{1}{(2-\alpha)(1-\alpha)}$, et cette solution vérifie bien sur $[0,1]$ $u_0(0) = u_0(1) = 0$, u_0 dérivable sur $]0,1]$ et u_0' dans L^2. On note alors que l'égalité formelle $-u_0'' = x^\alpha$ n'est vraie que sur $]0,1]$.
Il faut maintenant expliquer le titre de cette section. On constate que les dérivées en question sont définies uniquement sur $]0,1]$, et l'exemple précédent pour $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$ montre que les régularités nécessaires pour u sont différentes. Dans le cas où $u' \in L^2$, u nulle sur le bord, on a pu démontrer

$$\int_0^1 x^\alpha u(x)dx = -\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} u'(x)dx$$

donc même si la fonction de L^2 $\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ pour $\alpha < \frac{3}{2}$ n'est pas dérivable sur $[0,1]$, on peut appliquer une formule d'intégration par parties. Cette formule d'intégration par parties aboutit à la définition de la dérivée faible, après introduction d'un espace adapté:

Définition 1.1 *On appelle $H_0^1(\Omega)$ le complété de $C_0^1(\Omega)$ (fonctions de classe C^1 à support compact dans Ω) pour la norme $||u||_{H_0^1(\Omega)} = ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$.*

Définition 1.2 *Soit $f \in L^2(\Omega)$. On appelle dérivée faible de f par rapport à x_j la* **forme linéaire** *définie sur $C_0^1(\Omega)$*

$$< \partial_{x_j} f, v >= -\int_\Omega f(x)\partial_{x_j} v(x)dx.$$

Lemme 1.1 *La forme linéaire précédente s'étend à $v \in H_0^1(\Omega)$*

Preuve On vérifie que si $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite v_n de $C_0^1(\Omega)$ qui est de Cauchy pour la norme $||.||_{H_0^1(\Omega)}$ et telle que $v_n \to v$ dans L^2. Alors on a

$$| < \partial_{x_j} f, v_n > - < \partial_{x_j} f, v_m > | \leq ||f||_{L^2(\Omega)} ||v_n - v_m||_{H_0^1(\Omega)}$$

La suite $< \partial_{x_j} f, v_n >$ est donc une suite de Cauchy réelle donc elle converge. Sa limite ne dépend pas du choix de la suite v_n convergeant vers v, donc ceci définit $< \partial_{x_j} f, v >$.

1.3 Les espaces de Sobolev

Définition 1.3 *On appelle $H^m(\Omega)$ le complété pour la norme*

$$||u||_{H^m(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

de l'espace $C^m(\Omega)$.

Proposition 1.1 *L'espace $H^m(\Omega)$ est l'espace des distributions de $L^2(\Omega)$ telles que, pour tout $|\alpha| \leq m$, $\partial^\alpha u$ soit dans $L^2(\Omega)$*

La proposition précédente doit se comprendre sous la forme suivante: à partir de $u \in L^2(\Omega)$ on définit la dérivée faible de u par rapport à x_j, cette dérivée faible est dans $L^2(\Omega)$, donc on peut à son tour en considérer la dérivée faible par rapport à x_k.

Montrons cette proposition. Soit $u \in H^m(\Omega)$. C'est la limite pour la norme $||.||_m$ d'une suite u_n de fonctions de classe C^m. En particulier, u_n est une suite de Cauchy pour la norme L^2, et comme L^2 est un espace complet, la limite est dans L^2. On a alors

$$< \partial_j u_n, v >= - < u_n, \partial_j v > .$$

Comme $u_n \to u$, $< u_n, \partial_j v > \to < u, \partial_j v >$. Donc $< \partial_j u_n, v >$ admet une limite qui est $- < u, \partial_j v >=< \partial_j u, v >$. La suite $\partial_j u_n$ converge dans L^2 (cas $m \geq 1$), donc la limite est dans L^2. Cette limite s'identifie à $\partial_j u$, donc on en conclut que la dérivée faible $\partial_j u$ est dans L^2. On poursuit le raisonnement jusqu'aus dérivées $|\alpha| = m$.
Réciproquement, prenons une suite u_n telle que $\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u$ pour tout α, $|\alpha| = m$: on considère par exemple une formule de Taylor en supposant $v_{\alpha,n} \to \partial^\alpha u$ et en construisant u_n par formule de Taylor avec reste intégral à partir des dérivées d'ordre m. Il suffit alors de construire de proche en proche les primitives.

Chapter 2

Introduction au concept général de distribution

Il est parfois utile, dans la résolution de certains problèmes de la Physique, de considérer des objets, appelés couramment par abus de langage "fonctions", mais mal définies comme représentations ponctuelles. L'exemple le plus célèbre en est la mesure de Dirac, qui, si elle est considérée comme une fonction, est "nulle en dehors de 0, infinie en 0" [4]. Le but de ce cours est de préciser ces notions, et en particulier de donner un cadre rigoureux aux exemples physiques qui suivent. La mesure de Dirac peut être précisée au sens des mesures, comme étant $\mu_0(]a,b[) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \notin]a,b[\\ 1 \text{ si } 0 \in]a,b[\end{cases}$. Dans ce cas, la théorie des mesures boréliennes s'applique. Mais alors que dire de ce que Dirac a défini, qui est la dérivée de la mesure de Dirac? Ce n'est plus une mesure donc il faut pouvoir la définir.

Dans un premier paragraphe, on s'intéresse à des suites de fonctions qui convergent vers μ_0 ou des combinaisons de mesures μ_0.

2.1 L'exemple de base

Il est clair que la définition de la mesure de Dirac par la phrase de Dirac n'est pas complète; en effet, on considère les deux fonctions, qui sont elles bien définies sur $\mathbb{R}$ pour tout $\varepsilon > 0$: la fonction ϕ_1^ε telle que $\phi_1^\varepsilon(x) = 0$ pour $|x| \geq \varepsilon$, et $\phi_1^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon - |x|)$ pour $|x| \leq \varepsilon$, et la fonction $\phi_2^\varepsilon = 2\phi_1^\varepsilon$. Elles vérifient toutes les deux, à la limite, la relation "nulle en dehors de 0, infinie en 0". En revanche, il faut donner un autre critère pour les différencier.

Le premier critère auquel on pense est intégral: on calcule $\int_{\mathbf{R}} \phi_1^\varepsilon(x)dx = 1$ et $\int_{\mathbf{R}} \phi_2^\varepsilon(x)dx = 2$. Ceci permet de différencier μ_0 et $2\mu_0$.

Ce critère n'est pas suffisant: en effet considérons $\phi_3^\varepsilon(x)$ la fonction définie par

$$\begin{cases} \phi_3^\varepsilon(x) = \phi_1^\varepsilon(x), |x| \leq \varepsilon \\ \phi_3^\varepsilon(x) = -\phi_1^\varepsilon(x - 2\varepsilon), |x - 2\varepsilon| \leq \varepsilon \end{cases}$$

et $\phi_4^\varepsilon(x)$ définie (pour $\varepsilon < \frac{1}{2}$) par

$$\begin{cases} \phi_4^\varepsilon(x) = \phi_1^\varepsilon(x), |x| \leq \varepsilon \\ \phi_4^\varepsilon(x) = -\phi_1^\varepsilon(x - 1), |x - 1| \leq \varepsilon \end{cases}$$

On constate que $\int_{\mathbf{R}} \phi_3^\varepsilon(x)dx = \int_{\mathbf{R}} \phi_4^\varepsilon(x) = 0$. On ne peut pas différencier ϕ_3^ε de ϕ_4^ε par ce critère. On ne peut pas non plus différencier ϕ_3^ε de $2\phi_3^\varepsilon$.

Un critère qui pourrait nous satisfaire est de calculer la norme dans $L^1(\mathbb{R})$: en effet, la norme de ϕ_3^ε et celle de ϕ_4^ε sont toutes les deux égales à 2; on a ainsi différencié ces suites de fonctions de la suite de fonctions égales à 0, mais pas entre elles.

Il est donc nécessaire d'évaluer "plus de quantités que la simple intégrale". D'autre part, la description de la fonction de Dirac telle qu'elle est énoncée dans ce paragraphe est aussi incomplète. On considère la fonction $\phi_5(x) = \phi_1(x - \varepsilon)$, nulle en 0, tendant vers 0 en tout point x différent de 0 vers 0 (pour tout $x > 0$ il existe ε tel que $x > 2\varepsilon$, donc $\phi_5(x) = 0$, et pour $x < 0$, $\phi_5(x) = 0$). Cette fonction ϕ_5 tend donc simplement vers 0, mais son intégrale totale est 1. On voit ici qu'on ne peut pas identifier le point de singularité pour cette fonction en considérant uniquement sa limite et son intégrale.

On termine ce paragraphe avec une extension de l'exemple de base : la fonction H de Heaviside, introduite bien avant les distributions par Heaviside [5]. Un des objectifs du cours est de pouvoir trouver une classe d'objets, appelés distributions, dans laquelle la fonction de Heaviside, égale à 1 pour $x > 0$ et à 0 pour $x < 0$, égale à $\frac{1}{2}$ en $x = 0$, est dérivable. Quel serait le candidat pour cette dérivée ? On voit que, pour $x_0 \neq 0$, le taux d'accroissement est nul dès que $h < |x_0|$, et pour $x_0 = 0$, ce taux d'accroissement est $\frac{1}{2|h|}$. Il tend ainsi vers $+\infty$ quand h tend vers 0, donc un candidat souhaitable pourrait être la distribution de Dirac.

Les opérations sur cette classe d'objets doivent être valables, donc on veut pouvoir calculer les dérivées de la fonction de Heaviside en calculant la dérivée de fonctions qui l'approchent.

Un exemple simple est $f_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, x < -\epsilon \\ \frac{x+\epsilon}{2\epsilon}, -\epsilon \leq x \leq \epsilon \\ 1, x > \epsilon \end{cases}$. On voit que f_ϵ tend vers H simplement mais pas uniformément, et $f_\epsilon' = \frac{1}{2\epsilon}$ pour $|x| < \epsilon$. En revanche, on trouve que $\int |f_\epsilon - H|dx = \frac{\epsilon}{2}$, ainsi f_ϵ tend vers H au sens L^1. On note en particulier que H et f_ϵ sont toutes les deux dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ mais ne sont pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

Un autre exemple est $g_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, x < -\epsilon \\ 1 - \frac{(\epsilon-x)^2}{2\epsilon^2}, 0 \leq x \leq \epsilon \\ \frac{(\epsilon+x)^2}{2\epsilon^2}, -\epsilon \leq x \leq 0 \\ 1, x > \epsilon \end{cases}$. Cette fonction admet pour dérivée ϕ_1^ϵ. Elle est donc de classe C^1 et de plus, g_ϵ tend vers H au sens L^1 aussi.

On a, aussi bien pour f_ϵ et pour g_ϵ, une convergence simple vers f, mais la convergence au sens de la norme du sup n'est pas assurée; en effet on a

$$\sup |f_\epsilon(x) - H(x)| = \sup |g_\epsilon(x) - H(x)| = \frac{1}{2}.$$

Les exemples f_ϵ et g_ϵ ont été choisis symétriques par rapport à 0; on peut aussi choisir $\tilde{g}_\epsilon$ qui vaut $\frac{(x+\epsilon)^2}{3\epsilon^2}$ pour $-\epsilon \leq x \leq 0$ et $\frac{2}{3}(x^2+1) - \frac{2}{3\epsilon}(x-1)$ pour $0 \leq x \leq \epsilon$, qui tend vers la valeur $\frac{1}{3}$ en 0.

Dans la suite de ce cours, on étudiera la notion de convergence de f_ϵ, g_ϵ, $\tilde{g}_\epsilon$ vers la fonction de Heaviside. Notons que nous omettons la variable x pour parler de convergence, ce n'est pas la convergence ponctuelle ou la convergence presque partout que nous considérerons dans ce cours.

2.1.1 Notion d'intégrale d'action

Nous proposons dans un premier temps l'analyse des distributions ϕ_1^ε, ϕ_2^ε, ϕ_3^ε, ϕ_4^ε en intégrant la distribution sur $[a,b]$, où a et b sont deux réels distincts, indépendants de ε. Etudions ϕ_1^ε. Pour chaque ligne du système ci-dessous, il existe $\varepsilon(a,b)$ tel que, pour $\varepsilon < \varepsilon(a,b)$, on ait l'égalité du système. Par exemple, dans le premier cas, $\varepsilon(a,b) = |b|$, dans le deuxième cas $\varepsilon(a,b) = a$.

$$\begin{cases} a < b < 0, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = 0 \\ 0 < a < b, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = 0 \\ a < 0 < b, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = 1 \\ a = 0, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = \frac{1}{2} \\ b = 0, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit que la limite de $\int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx$ lorsque ε tend vers 0 notée $I_1(a,b)$, vérifie

$$0 \in]a,b[, I_1(a,b) = 1, 0 \notin [a,b], I_1(a,b) = 0, I_1(0,b) = I_1(a,0) = \frac{1}{2}.$$

Aux cas particuliers de $ab = 0$ près, la limite $I(a,b)$ indique l'appartenance de 0 à $[a,b]$. C'est pour cela que l'on appelle souvent la limite de ϕ_1^ε la mesure de Dirac de 0.

Considérons les exemples de ϕ_3^ε et $|\phi_3^\varepsilon|$. Comme $\phi_3^\varepsilon(0) = 0$ et que, pour tout $x \neq 0$, il existe ε tel que $\phi_3^\varepsilon(x) = 0$, la limite ponctuelle de $|\phi_3^\varepsilon(x)|$ est zéro pour tout x. En revanche, si on effectue pour ϕ_3^ε et pour $|\phi_3^\varepsilon|$ le même calcul que précédemment, on trouve

$$\begin{array}{l} a < b < 0, \int_a^b \phi_3^\varepsilon(x)dx = 0 \\ a < b < 0, \int_a^b |\phi_3^\varepsilon(x)|dx = 0 \\ 0 < a < b, \int_a^b \phi_3^\varepsilon(x)dx = 0 \\ 0 < a < b, \int_a^b |\phi_3^\varepsilon(x)|dx = 0 \\ a < 0 < b, \int_a^b \phi_3^\varepsilon(x)dx = 0 \\ a < 0 < b, \int_a^b |\phi_3^\varepsilon(x)|dx = 2 \\ a = 0, \int_a^b \phi_3^\varepsilon(x)dx = 1 \\ a = 0, \int_a^b |\phi_3^\varepsilon(x)|dx = 1 \\ b = 0, \int_a^b \phi_3^\varepsilon(x)dx = -1 \\ b = 0, \int_a^b |\phi_3^\varepsilon(x)|dx = 1 \end{array}$$

Les comportements de la suite de fonctions ϕ_3^ε et de la suite de fonctions $|\phi_3^\varepsilon|$ sont différents, alors que les deux fonctions tendent toutes les deux ponctuellement vers 0. On remarque en particulier que $|\phi_3|$ tend vers $2\delta_0$, qui est la notation traditionnelle de la mesure de Dirac, et que ϕ_3 tend vers 0.

Nous évaluons donc, en règle générale, l'action de nos fonctions ϕ_i^ε sur une fonction $\phi(x)$ en nous inspirant de l'exemple des observables de la mécanique quantique. L'équivalent de $A\psi$ est le projecteur sur l'approximation de la mesure de Dirac ϕ_i^ε, que l'on veut évaluer, et ϕ remplace $\bar{\psi}$. Définissons

$$I_i^\varepsilon(\phi) = \int_{\mathbf{R}} \phi_i^\varepsilon(x)\phi(x)dx$$

où ϕ est une fonction au moins continue sur $\mathbb{R}$ et bornée.

Avec, respectivement, $x = \varepsilon t$ sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $x - 1 = \varepsilon t$ sur $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, $x = 2\varepsilon + \varepsilon t$ sur $[\varepsilon, 3\varepsilon]$, on trouve

$$\begin{cases} I_1^\varepsilon(\phi) = \int_{-1}^1 \phi(\varepsilon t)(1-|t|)dt \\ I_2^\varepsilon(\phi) = 2I_1^\varepsilon(\phi) \\ I_3^\varepsilon(\phi) = \int_{-1}^1 [\phi(\varepsilon t) - \phi(2\varepsilon + \varepsilon t)](1-|t|)dt \\ I_4^\varepsilon(\phi) = \int_{-1}^1 [\phi(\varepsilon t) - \phi(1 + \varepsilon t)](1-|t|)dt \end{cases}$$

La fonction $t \to \phi(\varepsilon t)$ est bornée, pour $\varepsilon < 1$, par le maximum de ϕ sur $[-1, 1]$, qui existe puisque ϕ est continue sur le compact $[-1, 1]$. Ainsi on peut appliquer le théorème de la convergence dominée dans les quatre intégrales, car la fonction $1 - |t|$ est intégrable sur $[-1, 1]$, d'intégrale 1. La limite de $\phi(\varepsilon t)$, pour chaque t, est $\phi(0)$. La limite de $\phi(1+\varepsilon t)$, pour tout t, est $\phi(1)$, et la limite de $\phi(2\varepsilon+\varepsilon t)$, pour tout t, est $\phi(0)$. Ainsi on trouve

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_1^\varepsilon = \phi(0), \lim_{\varepsilon\to 0} I_2^\varepsilon = 2\phi(0), \lim_{\varepsilon\to 0} I_3^\varepsilon = 0, \lim_{\varepsilon\to 0} I_4^\varepsilon = \phi(0) - \phi(1)$$

et de plus, les intégrales écrites ci-dessus vérifient les inégalités, pour $\varepsilon < 1$

$$I_1^\varepsilon(\phi) \le \max_{x\in[-1,1]} |\phi(x)|$$

$$I_2^\varepsilon(\phi) \le 2 \max_{x\in[-1,1]} |\phi(x)|$$

$$I_3^\varepsilon(\phi) \le 2 \max_{x\in[-1,1]} |\phi(x)|$$

$$I_4^\varepsilon(\phi) \le 2 \max_{x\in[-1,3]} |\phi(x)|.$$

On a ainsi, pour tout j:

$$I_j^\varepsilon(\phi) \le C \max_{x\in\mathbf{R}} |\phi(x)|.$$

Lorsqu'on rencontre ce phénomène en Physique, on dit que $\lim \phi_1^\varepsilon$ et $\lim_\varepsilon \phi_2^\varepsilon$ sont deux mesures de Dirac, et "chargent" le point 0 par la valeur 1 ou par la valeur 2.

2.1.2 Notion de dérivée

On peut effectuer la même analyse sur les fonctions dérivées de ϕ_i^ε. Considérons par exemple la fonction $(\phi_1^\varepsilon)'(x)$. C'est une fonction constante par morceaux, valant ε^{-2} pour $-\varepsilon < x < 0$, et $-\varepsilon^{-2}$ lorsque $0 < x < \varepsilon$. On constate que le critère intégral ne convient pas: en effet l'intégrale L^1 de la fonction est égale à $\frac{2}{\varepsilon}$, qui n'a pas de limite. L'analyse de la suite $(\phi_1^\varepsilon)'$ est très imprécise avec les outils que nous avons pour le moment. Si on veut appliquer le critère précédent, on calcule $\int_{\mathbf{R}} (\phi_1^\varepsilon)'(x)\phi(x)dx$. On trouve

$$\int_{-\varepsilon}^{0} \frac{\phi(x)}{\varepsilon^2}dx - \int_{0}^{\varepsilon} \frac{\phi(x)}{\varepsilon^2}dx = -\int_{0}^{1} \frac{\phi(\varepsilon x) - \phi(-\varepsilon x)}{\varepsilon}dx.$$

On suppose que ϕ est dérivable en 0, plus précisément de classe C^1. Alors, une formule de Taylor avec reste intégral donne $\phi(\pm\varepsilon x) = \phi(0) \pm \varepsilon x \int_0^1 \phi'(\pm\varepsilon\theta x)d\theta$, ce qui donne

$$\int_{-\varepsilon}^{0} \frac{\phi(x)}{\varepsilon^2}dx = -\int_0^1 [\int_0^1 \phi'(\varepsilon\theta x)d\theta + \int_0^1 \phi'(-\varepsilon\theta x)d\theta]xdx.$$

Une application du théorème de la convergence dominée prouve que cette intégrale converge vers $-\int_0^1 2xdx\phi'(0) = -\phi'(0)$. On a dû supposer, pour calculer cette limite, la fonction ϕ' de classe C^0 (ϕ de classe C^1).

2.1.3 Dérivée de la fonction créneau

Rappelons que la fonction $1_{[0,1]}$ n'est pas dérivable en 0 et en 1. Par analogie avec ce que l'on a obtenu pour $(\phi_1^\varepsilon)'(x)$, nous allons définir cette dérivée. Rappelons

$$\int \phi(x)(\phi_1^\varepsilon)'(x)dx \to -\phi'(0) = - < \delta_0, \phi' > .$$

La fonction primitive $u_\varepsilon^1(x)$ de $\phi_1^\varepsilon(x)$ est nulle pour $x \leq -\varepsilon$, égale à $\frac{1}{2\varepsilon^2}(t+\varepsilon)^2$ pour $-\varepsilon \leq t \leq 0$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2}(t-\varepsilon)^2$ pour $0 \leq t \leq \varepsilon$ et 1 pour $x \geq \varepsilon$. On aurait l'idée d'écrire

$\int u_\varepsilon^1\phi' dx$ et $-\int \phi_1^\varepsilon\phi$ ont la même limite.

La deuxième limite est $-\phi(0)$ par les résultats précédents. La première limite est égale à celle de $\int_{-1}^0 \frac{1}{2}\varepsilon(v+1)^2\phi'(\varepsilon v)dv + \varepsilon\int_0^1 \frac{1}{2}(v-1)^2\phi'(\varepsilon v)dv + \int_\varepsilon^{+\infty} \phi'(t)dt$. En supposant que ϕ' tend vers 0 en $+\infty$, sinon l'intégrale n'existe pas, en en faisant tendre ε vers 0, les deux premiers termes tendent vers 0 et le troisième est égal à $-\phi(\varepsilon)$.

On a constaté que

$$\int u_\varepsilon^1\phi' dx \to -\phi(0).$$

Ceci nous permettra de constater que, au sens des distributions, la dérivée de la fonction de Heaviside, indicatrice de $\mathbb{R}_+$, est la distribution de Dirac δ_0. C'est un des résultats les plus utiles de cette branche de l'Analyse. Comme on a obtenu

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}} \phi(x)(\phi_1^\varepsilon)'(x)dx = -\phi'(0),$$

il suffit que ϕ soit au moins de classe C^1. Si on veut obtenir dans notre analyse la dérivée $n-$ième de la mesure de Dirac δ_0, il suffit que ϕ soit de classe C^n. Il faudrait donc considérer ϕ la plus régulière possible pour "capturer" toutes les "distributions" possibles.

Dans l'exemple suivant, la suite d'intégrales ne converge pas si ϕ est continue mais n'est pas de classe C^1. On introduit la fonction $\phi_6^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}(\varepsilon^2 - x^2)$ sur $|x| \leq \varepsilon$ et 0 ailleurs. On constate que

$$\int \phi(x)\phi_6^\varepsilon(x)dx = \int_{-1}^1 \phi(\varepsilon t)(1-t^2)dt \to \frac{4}{3}\phi(0).$$

D'autre part, la dérivée de cette fonction est $\phi_7^\varepsilon(x) = -\frac{2x}{\varepsilon^3}$ sur $-\varepsilon, \varepsilon$ et on a

$$\int \phi_7^\varepsilon(x)\phi(x)dx = -\frac{2}{\varepsilon}\int_{-1}^1 \phi(\varepsilon t)tdt.$$

Ainsi, lorsque l'on choisit $\phi(x) = \frac{x}{|x|}(|x|)^{\frac{1}{2}}$, cette intégrale vaut $-\frac{2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\int_{-1}^1 |t|(|t|)^{\frac{1}{2}}dt = -4\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}dt = -\frac{8}{3}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$. La suite $\int \phi_7^\varepsilon(x)\phi(x)dx$ diverge pour une fonction ϕ particulière de classe C^0 mais pas de classe C^1.

On suppose ϕ de classe C^1. On utilise la formule de Taylor avec reste intégral $\phi(x) = \phi(0) + x\int_0^1 \phi'(xt)dt$. De $\int t\phi(0)dt = 0$, on déduit

$$\int \phi_7^\varepsilon(x)\phi(x)dx = -2\int_{-1}^1 (\int_0^1 \phi'(\varepsilon tu)du)t^2dt \to -\frac{4}{3}\phi'(0).$$

Rapprochant ce résultat de $\int \phi_6^\varepsilon(x)\phi(x)dx \to \frac{4}{3}\phi(0)$, on voit apparaitre une formule de dérivation qui ressemble à une formule d'intégrations par parties.

Dans cette partie, on a donc obtenu un critère suffisant pour obtenir une grande classe de distributions comme limite de fonctions: il suffit de prendre ϕ de classe C^∞ à support compact. L'étude de l'espace de telles fonctions fait l'objet de la partie suivante. La formule de dérivation des distributions sera une généralisation de la formule d'intégration par parties, et on le verra au chapitre 1, section 1.4.

2.1.4 La distribution associée à $\frac{1}{x}$

Dans les critères sur les fonctions usuelles , le critère d'être dans L^1 apparait simplement car si on veut calculer l'intégrale de $f\phi$, c'est facie à faire lorsque ϕ est bornée et f est L^1. La fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas L^1, mais une version simple va nous montrer que l'on peut lui associer une distribution de manière élémentaire.

Lorsque ϕ est constante au voisinage de 0, par exemple sur $[-1, 1]$, l'intégrale de $\frac{\phi(x)}{x}$ peut s'écrire $\int_{\text{supp }\phi-[-1,1]} \frac{\phi(x)}{x} + \lim_{\epsilon\to 0}[\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{\phi(0)dx}{x} + \int_\epsilon^1 \frac{\phi(0)dx}{x}] = \int_{\text{supp }\phi-[-1,1]} \frac{\phi(x)}{x}$ qqui existe.

Lorsque $\phi(0) = 0$, on vérifie que $\phi(x) = x\psi(x) = x\int_0^1 \phi'(xt)dt$ si ϕ est de classe C^1, donc ψ est continue et l'intégrale de $\frac{\phi(x)}{x}$ est donc l'intégrale de ψ, bien définie.

Enfin, on peut toujours écrire $\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$ sur $[-1, 1]$ et les deux remarques précédentes donnent un sens à $\int_{-1}^1 \frac{\phi(x)dx}{x}$. Ces idées seront développées dans le chapitre sur les valeurs principales.

2.2 Des applications physiques variées

2.2.1 Les observables de la mécanique quantique

La mécanique quantique a introduit le concept d'observable dans les années vingt pour tenir compte du fait que l'observation modifiait le phénomène physique. Dans ce cadre, chaque quantité physique A est considérée non pas comme un nombre, mais comme un opérateur qui, à un état pur ψ_n d'une particule, associe $a_n\psi_n$, où a_n est la valeur de la quantité physique sur l'état "pur" ψ_n. Un état "pur" ψ_n est une fonction propre normalisée (on verra plus loin comment) de l'opérateur de Schrödinger associé à la particule.

Toute particule est alors représentée par une superposition d'états purs:

$$\psi(x,t) = \sum c_n(t)\psi_n(x,t) \tag{2.2.1}$$

avec

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\psi_n(t)|^2 dx = 1, \tag{2.2.2}$$

Les états purs sont dits cohérents quand $\int_{\mathbf{R}^3} \psi_n \bar{\psi}_m dx$. On suppose de plus qu'ils forment une base infinie des fonctions d'onde. La fonction d'onde représente la densité de probabilité de présence d'une particule en x à t, de sorte que $\int |\psi(x,t)|^2 dx = 1$, ce qui correspond à $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1$. Par le principe de superposition, on a $A\psi = \sum_{n\geq 0} c_n a_n \psi_n$.

La seule quantité accessible à l'expérience est "la somme des valeurs de l'observable A sur les états purs ψ_m, répartis suivant la probabilité de présence $|c_n|^2$"[1]. Cette valeur est alors égale à:

$$\sum a_n |c_n|^2 = \int_{\mathbf{R}^3} A\psi(x,t)\bar{\psi}(x,t)dx. \tag{2.2.3}$$

Ainsi le carré $(A\psi, \psi)$, produit scalaire dans l'espace des fonctions de carré intégrable, représente la quantité physique du phénomène modélisé par A pour chaque état de la particule ψ.

2.2.2 L'électrostatique

Nous expliquons dans ce paragraphe la terminologie que nous avons introduite lorsque nous avons parlé de notion de mesure "chargeant" 0. L'équation de l'électrostatique est

$$\Delta V + \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} = 0,$$

associée au potentiel ($r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

On dit que ρ_v est la distribution de charges associée à la charge q, calculées de manière intégrale.

Calculons ΔV hors de $(x,y,z) = (0,0,0)$. On trouve

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x}{r^4}\frac{x}{r} = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}.$$

Ainsi, hors du point $(0,0,0)$, $\Delta(\frac{1}{r}) = 0$. La "fonction" $\Delta(\frac{1}{r})$ est un bon candidat pour être une distribution de Dirac.

On vérifie, pour s de classe C^∞ à support compact, **radiale**, que (par intégrations par parties et utilisant $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})$)

[1] car $\sum_{n\geq 0} |c_n|^2 = 1$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3, r\geq\varepsilon} \Delta(\tfrac{1}{r})s(r)dxdydz &= \int_\varepsilon^\infty \tfrac{1}{r}(\Delta s)4\pi r^2 dr\\ &= 4\pi\int_\varepsilon^\infty [r\tfrac{d^2s}{dr^2}+2\tfrac{ds}{dr}]dr\\ &= 4\pi\int_\varepsilon^\infty [\tfrac{d}{dr}(r\tfrac{ds}{dr})+\tfrac{ds}{dr}]dr\\ &= -4\pi\varepsilon\tfrac{ds}{dr}(\varepsilon)-4\pi s(\varepsilon).\end{aligned}$$

Remarquons que la première égalité doit être considérée comme une définition. On vérifie que cette intégrale converge, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers $-4\pi s(0)$. La distribution associée est alors la distribution $-4\pi\delta_0$, par analogie avec la "distribution" notée δ_0 sur $\mathbb{R}$ qui fait correspondre à ϕ la valeur $\phi(0)$ comme nous l'avons vu plus haut.

Ainsi on écrira plus loin

$$\Delta(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta_0.$$

Lorsque $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$, on trouve $\Delta V = -\frac{q\delta_0}{\varepsilon_0}$.

A la charge q placée en $r = 0$ est associée la distribution de charge $q\delta_0$ selon la terminologie physique. Ceci explique que l'on dise que la distribution δ_0 "charge" le point 0 avec une charge 1.

Remarque Notons que lorsque l'on considère l'intégrale sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^3, r\geq\varepsilon} \Delta(\frac{1}{r})s(r)dxdydz$$

on trouve automatiquement 0. Il faut, pour comprendre cela, se reporter à la notion de dérivée. Supposons ainsi que l'on note $1_{r\geq\varepsilon}$ la fonction indicatrice de l'extérieur de la boule. Les deux calculs parallèles que l'on peut faire sont, d'une part, la limite de $1_{r\geq\varepsilon}\Delta(\frac{1}{r})$, et, d'autre part, la limite de $\Delta(\frac{1}{r}1_{r\geq\varepsilon})$ après intégration par parties. Il est clair que ces deux fonctions sont distinctes. En effet, la fonction $1_{r\geq\varepsilon}$ introduit un "saut" de 1 à 0, qui est difficilement compatible avec une dérivation, alors que si la dérivation est déjà faite, cela ne pose pas de problème. Le même phénomène se produit avec $(\phi_1^\varepsilon)'$ si on l'applique à la fonction créneau valant 1 sur $[0,1]$ et 0 partout ailleurs. En effet, dans ce cas, on trouve que $\int_{\mathbb{R}}(\phi_1^\varepsilon)'(x)1_{[0,1]}dx = \frac{1}{\varepsilon}$, qui n'admet pas de limite, ceci car on ne peut pas calculer $\frac{d}{dx}(1_{[0,1]})$, cette fonction n'étant pas dérivable en 0 ni en 1.

2.2.3 Les relations de Rankine-Hugoniot

On considère le système d'équations d'Euler conservatives, modélisant l'écoulement instationnaire d'un fluide de densité ponctuelle ρ, de vitesse u, de pression p et dénergie e, qui sont des "fonctions" de $x \in \mathbb{R}$ et de t. On notera indifféremment ∂_t et $\frac{\partial}{\partial t}$ la dérivée partielle par rapport à t, et ∂_x et $\frac{\partial}{\partial x}$ la dérivée partielle par rapport à x. Ainsi

$$\begin{cases}\partial_t\rho + \partial_x(\rho u) = 0\\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0\\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho ue + pu) = 0.\end{cases} \tag{2.2.4}$$

On suppose que le fluide est traversé par un choc de vitesse σ, c'est-à-dire qu'il y a discontinuité (par exemple) de la densité au travers de la courbe dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $x - \sigma t = 0$. On désignera par f^+ la limite de $f(x,t)$ pour $x - \sigma t \to 0, x - \sigma t > 0$ et par f^- la limite de $f(x,t)$ pour $x - \sigma t \to 0, x - \sigma t < 0$.

On veut trouver des relations entre les valeurs de ρ, u, e, p avant et après le choc, en fonction de σ. On le fait "heuristiquement" en utilisant les idées précédentes. On intègre contre la fonction $1_{x\in[\sigma t-\varepsilon,\sigma t+\varepsilon]}$ l'équation $\partial_t\rho+\partial_x(\rho u)=0$. On obtient:

$$\int_{\sigma t-\varepsilon}^{\sigma t+\varepsilon}(\partial_t\rho+\partial_x(\rho u))dx=0.$$

On note $\tilde\rho(X,t)=\rho(X+\sigma t,t)$, densité liée au choc. On trouve

$$\partial_t\tilde\rho=\sigma\partial_x\rho(X+\sigma t,t)+\partial_t\rho(X+\sigma t,t).$$

On obtient alors

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\partial_t\rho(X+\sigma t,t)dX+\sigma[\rho(\sigma t+\varepsilon,t)-\rho(\sigma t-\varepsilon,t)]=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\partial_t\tilde\rho(X+\sigma t,t)dX.$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\partial_t\tilde\rho(X+\sigma t,t)dX-\sigma[\rho(\sigma t+\varepsilon,t)-\rho(\sigma t-\varepsilon,t)]+(\rho u)(\sigma t-\varepsilon,t)-(\rho u)(\sigma t-\varepsilon,t)=0.$$

Nous faisons l'hypothèse que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\partial_t\tilde\rho(X+\sigma t,t)dX$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0.

On en tire, appliquant ce même raisonnement pour toutes les équations

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma(\rho^+-\rho^-)=(\rho u)^+-(\rho u)^-\\ \sigma((\rho u)^+-(\rho u)^-)=(\rho u^2+p)^+-(\rho u^2+p)^-\\ \sigma((\rho e)^+-(\rho e)^-)=(\rho ue+pu)^+-(\rho ue+pu)^-\end{array}\right.\tag{2.2.5}$$

La justification rigoureuse de ce système sera détaillée ultérieurement. Remarquons pour l'instant que ρ constant (égal à ρ^+ et à ρ^- de part et d'autre du choc) peut être une solution stationnaire. Ainsi, dans ce cas, les "fonctions" $\partial_t\rho$ et $\partial_x\rho$ sont nulles partout sauf en $(\sigma t,t)$. Elles sont donc des candidats potentiels pour être des distributions de Dirac supportées sur $x=\sigma t$. On remarque que cela est vrai grâce à

$$\begin{array}{ll}\int\partial_x\rho(x,t)\phi(x)dx & =-\int\rho(x,t)\partial_x\phi(x)dx\\ & =-\rho^-\int_{-\infty}^{\sigma t}\partial_x\phi(x)dx-\rho^+\int_{\sigma t}^{+\infty}\partial_x\phi(x)dx\\ & =-\rho^-[\phi(\sigma t)-0]-\rho^+[0-\phi(\sigma t)]\\ & =(\rho^+-\rho^-)\phi(\sigma t).\end{array}$$

2.2.4 L'énergie pour l'équation des ondes

On considère l'équation la plus classique de la Physique mathématique: l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0.$$

Nous définissons

$$E(t)=\frac12\int_{\mathbf{R}^3}[(\frac{\partial u}{\partial t})^2+(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2]dxdydz.$$

Il vient

$$E'(t) = \frac{d}{dt}E(t) = \int_{\mathbf{R}^3}[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z}]dxdydz,$$

et en utilisant l'équation:

$$E'(t) = \int_{\mathbf{R}^3}[\frac{\partial u}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z}]dxdydz.$$

$$E'(t) = \int_{\mathbf{R}^3}[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial z})]dxdydz.$$

Lorsque on suppose que $\partial_t, \partial_x, \partial_y \partial_z u$ tendent vers 0 aux bornes du domaine d'intégration (ce qui est vérifié en électromagnétisme lorsque il n'y a pas de source entrante, on trouve $E'(t) = 0$, donc $E(t) = E(0)$. On sera ainsi amené à considérer des fonctions telles que l'énergie E existe, qui sont des fonctions moins régulières que C^2, espace de régularité naturelle pour l'équation des ondes. Ceci revient à dire que l'on pourra écrire l'équation autrement, manière qui demandera moins de régularité. Cette façon de voir correspond à l'approche de L. Schwartz des solutions généralisées de l'équation des ondes, solutions qui existaient et qu'il a étudiées avant l'introduction des distributions. Par exemple, on pourrait se demander si, en dimension 1 d'espace, la fonction $H(x - ct)$ est une solution de l'équation des ondes, même si cette fonction n'est pas dérivable au point (ct, t). L'espace de régularité envisagé sera ainsi l'espace $H^1(\mathbb{R}^3)$ pour la fonction u, pour tout temps, et l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$ pour la fonction $\partial_t u$, pour tout temps. Ces espaces seront définis ultérieurement.

2.2.5 Distribution périodique de charges

On veut construire un réseau périodique infini de charges ponctuelles placées en tout point entier relatif. La fonction associée simple est alors

$$\Psi^\varepsilon(x) = \sum_{n \in Z} \phi_1^\varepsilon(x - n).$$

Cette fonction, bien qu'elle soit dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, puisque intégrable sur tout compact[2] n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut donc vérifier que l'intégrale sur tout compact est équivalente à la taille du compact lorsque celle-ci tend vers $+\infty$.

On vérifie aussi que, pour une fonction ϕ donnée dans $\mathbb{R}$,

$$\int_{m-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \Psi^\varepsilon(x)\phi(x)dx = \sum_{p=m}^{p=n} \int_{-1}^{1} (1 - |t|)\phi(p + \varepsilon t)dt.$$

[2]On vérifie que, pour $\varepsilon < \frac{1}{2}$, les supports ne se chevauchent pas. Ainsi, lorsque K est un compact donné de $\mathbb{R}$, on se ramène à des intervalles compacts. Nous en prenons un, qui est noté $[m + \alpha, n + \beta]$ où m et n sont des entiers relatifs, α et β sont des réels de $[0, 1[$. On suppose dans un premier temps que $m < n + 1$. Il vient alors

$$\int_{m+\alpha}^{n+\beta} \Psi^\varepsilon(x)dx = (n - m - 2) + \int_{m+\alpha}^{m+1+\varepsilon} \Psi^\varepsilon(x)dx + \int_{n-\varepsilon}^{n+\beta} \Psi^\varepsilon(x)dx.$$

Le dernier terme se calcule en cherchant la position de β par rapport à ε et à $1 - \varepsilon$: $0 < \beta < \varepsilon$, on trouve $\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\varepsilon}$, $\varepsilon \leq \beta \leq 1 - \varepsilon$, on trouve 1 et $\beta > 1 - \varepsilon$, on trouve $1 + \frac{\beta + \varepsilon - 1}{2\varepsilon}$, l'intégrale entre $m + \alpha$ et $m + 1 + \varepsilon$ se calculant de même.

Ainsi, on vérifie, par intégrations par parties, que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-|t|)\phi(p+\varepsilon t)dt &= \phi(p)+\varepsilon\int_0^1\frac{(1-t)^2}{2}[\phi'(p+\varepsilon t)-\phi'(p-\varepsilon t)]dt\\ &= \phi(p)+\varepsilon^2\int_0^1\frac{(1-t)^2}{2}\int_{-t}^{t}\phi''(p+\varepsilon u)du)dt.\end{aligned}$$

La limite, pour $\varepsilon \to 0$, de $\int_{m-\varepsilon}^{n+\varepsilon}\Psi^{\varepsilon}(x)\phi(x)dx$ est $\sum_{p=m}^{p=n}\phi(p)$. Lorsque m tend vers $-\infty$ et n tend vers $+\infty$, cette limite existe lorsque $\sum|\phi(p)| < \infty$. La fonction $\phi(x) = \frac{1}{1+|x|}$ ne vérifie pas ce critère alors que $\phi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ le vérifie. Lorsque l'on suppose que la fonction $|\phi|$ a un sens de variation sur $[a+\infty[$ et sur $]-\infty,-b]$, cela équivaut à la convergence de l'intégrale. Il suffit, de plus, que l'intégrale de $|\phi''|$ converge pour que la suite $\int_{\mathbf{R}}\Psi^{\varepsilon}(x)\phi(x)dx$ existe, et admette pour limite $\sum\phi(n)$.

La fonction ϕ que l'on choisit comme fonction test doit être “suffisamment décroissante à l'infini”. Ce critère est **automatiquement** vérifié si la fonction ϕ est à support compact. Nous introduisons ainsi les fonctions **test**, selon la terminologie inspirée de la mécanique classique, qui sont les fonctions à support compact.

Chapter 3

Définitions et propriétés fondamentales

3.1 Définition et propriétés simples des distributions

Nous avons, dans le chapitre d'introduction, obtenu un certain nombre de résultats sur les formes linéaires sur des espaces de fonctions. En particulier, pour introduire la dérivée de la fonction de Heaviside, nous avons considére son action sur des fonctions continues, mais pour étudier une limite de fonctions correspondant à la dérivée seconde de la fonction de Heaviside, nous avons considéré son action sur des fonctions ϕ dérivables, comme dans le cas de l'étude de la distribution associée à $\frac{1}{x}$.

Pour effectuer les opérations de dérivation à n'importe quel ordre, il faut pouvoir considérer des fonctions ϕ indéfiniment dérivables. De plus, comme on veut traiter des fonctions localement intégrables, les fonctions ϕ considérées sont nécessairement à support compact.

On introduira donc l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact, noté $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans ce qui suit.

D'autre part, l'idée conceptuelle importante de la théorie des distributions que nous allons développer ci-après est que l'on ne considère plus des fonctions définies pour tout point ou presque partout (comme des fonctions de L^1), mais des 'fonctions' définies en quelque sorte globalement par des moyennes, c'est à dire des formes linéaires de l'espace des fonctions. Pour obtenir de plus des notions de régularité, il est nécessaire (pour avoir l'analogue du théorème de Riesz) d'avoir la **continuité** de ces formes linéaires. Cette continuité provient de la défiinition d'une topologie adaptée sur l'espace des fonctions de classe C_0^∞, qui n'est pas un espace de Hilbert.

3.1.1 Les fonctions de classe C^∞ à support compact

Dans ce paragraphe, nous définissons l'espace ('petit') des fonctions de classe C^∞ à support compact. Je dis que cet espace est petit, car il ne contient pas les fonctions analytiques, qui sont les fonctions les plus classiques régulières que l'on rencontre (en effet, si une de ces fonctions ψ etait analytique, en notant a la borne inférieure du support de ψ (telle que $\psi \neq 0$ pour $x \in]a, a+\varepsilon_0[$), et en écrivant la formule de Taylor en $x = a$, on sait que tous les coefficients sont nuls car la fonction est nulle pour $x < a$, donc elle est nulle aussi pour $x > a$, contradiction.)

Définition 3.1 *Le support d'une fonction ϕ de classe C^0 est le complémentaire du plus grand ouvert Θ où cette fonction ϕ est nulle. De manière équivalente, c'est l'adhérence de l'ensemble des points x où $\phi(x) \neq 0$.*

Définition 3.2 *L'espace des fonctions test, noté $C_0^\infty(\Omega)$, est l'ensemble des fonctions de classe C^∞, telle qu'il existe un compact $K \subset \Omega$, $K = supp\ \phi$. On notera $C_K^\infty(\Omega) = \{\phi \in C_0^\infty(\Omega), supp\phi \subset K\}$.*

Exemple 3.1 *La fonction à support compact canonique ϕ_0.*
On définit $\phi_0(x)$ par

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{x^2}{1-x^2}), |x| \leq 1, \\ 0, |x| \geq 1. \end{cases}$$

Cette fonction est dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Preuve.
Pour tout n, il existe un polynôme $P_n(x)$ tel que

$$\phi_0^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}}\phi_0(x).$$

En effet, $P_1(x) = -2x$ et $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) + P_n'(x)(1-x^2)^2 + 4nxP_n(x)(1-x^2)$.
On vérifie ainsi que

$$\phi_0^{(n)}(1-t) = e\frac{P_n(1-t)}{(2+t)^2n}\frac{1}{t^{2n}}e^{-\frac{1}{t(2+t)}}.$$

La limite de $\phi_0^{(n)}(1-t)$ lorsque t tend vers 0_+ est 0, pour tout n, car l'exponentielle est dominante en $+\infty$. Ainsi, on vérifie que ϕ_0' est continue par morceaux, ϕ_0' admet une limite à droite et une limite à gauche, qui sont égales à 0, aussi bien en $x = 1$ qu'en $x = -1$, donc ϕ_0 est dérivable et ϕ_0' est continue. On démontre ainsi que, pour chaque n, que $\phi_0^{(n)}$ est continue. Donc ϕ_0 est indéfiniment dérivable.

Exemple 3.2 *Il existe une fonction "marche" de classe C^∞ qui passe de la valeur 0 sur $]-\infty, -1]$ à 1 sur $[1, +\infty[$. On peut prendre par exemple*

$$\psi_0(x) = \frac{\int_{-1}^x \phi_0(t)dt}{\int_{-1}^1 \phi_0(t)dt}.$$

Exemple 3.3 *Une fonction C_0^∞ dont le support est $[a, b]$ est*

$$\frac{2}{b-a}\phi_0(-1 + \frac{2(x-a)}{b-a}).$$

Une fonction dont le support est $[-\varepsilon, \varepsilon]$ est $\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(\frac{x}{\varepsilon})$.

Exemple 3.4 *Une fonction C_0^∞, dont le support compact est $[a, b]$, identiquement égale à 1 sur $[c, d]$, $a < c < d < b$ est*

$$l_0(x) = \begin{cases} \psi_0(-1 + \frac{2(x-a)}{c-a}), x \leq \frac{c+d}{2} \\ \psi_0(-1 + \frac{2(b-x)}{b-d}), x \geq \frac{c+d}{2} \end{cases}$$

En effet, sur $[c, \frac{c+d}{2}]$, la fonction l_0 est identiquement égale à 1, ainsi que sur $[\frac{c+d}{2}, d]$, ce qui implique le caractère C^∞ au point $\frac{c+d}{2}$.

On note enfin que, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\varepsilon}\phi_0(\frac{x}{\varepsilon})\phi(x)dx = \int_{\mathbf{R}} \phi_0(t)\phi(\varepsilon t)dt$$

d'où la convergence, lorsque ε tend vers 0, de cette suite vers $\phi(0)\int_{-1}^{1}\phi_0(t)dt$ grâce au théorème de la convergence dominée.

3.1.2 Les définitions

Définition 3.3 *Soit u une forme linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$, qui à ϕ associe un nombre réel ou complexe, noté $< u, \phi >$. Cette forme u est une distribution sur Ω quand, pour tout compact K inclus dans Ω, il existe p_0 et C, en général dépendant de K tels que*

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \mathrm{supp}\phi \subset K, |< u, \phi >| \leq C \max_{|\alpha| \leq p_0, x \in K} |\partial_x^\alpha \phi(x)|.$$

On écrit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

On souhaite que cette définition des distributions soit compatible avec la continuité séquentielle que l'on peut définir sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$. Ceci permet d'énoncer le théorème avant la définition sur laquelle il s'appuie:

Théorème 3.1 *u est une distribution si et seulement si c'est une forme linéaire sur C_0^∞ telle que, pour toute suite ϕ_n d'éléments de $C_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers 0, alors $< u, \phi_n > \to 0$*

La définition de la convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$ n'a pas été encore précisée. Si on la définit comme suit:

Définition 3.4 *ϕ_n tend vers ϕ dans $C_0^\infty(\Omega)$ lorsque:*

- *il existe un compact fixe $K \subset \Omega$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$,* supp $\phi_n \subset K$.
- *la suite ϕ_n et toutes les suites $\partial_x^\alpha \phi_n$ convergent uniformément vers ϕ et $\partial_x^\alpha \phi$ sur K.*

alors le théorème 3.1 est vrai. Si on résume les définitions fondamentales de ce paragraphe, u est une distribution si et seulement si c'est une forme linéaire continue sur C_0^∞ muni de sa topologie. La topologie est définie par la définition 3.4.

Remarque On écrit un contre-exemple indiquant que la définition 3.4 donne la 'bonne' notion de topologie sur C_0^∞ permettant de représenter les fonctions de L^1_{loc} par des formes linéaires continues. Pour cela, on considère la fonction ψ_n, "plateau étiré"(que l'on utilisera par ailleurs) définie grâce à l'exemple 3.4 avec $[a, b] = [-n - 1, n + 1]$ et $[c, d] = [-n, n]$, on vérifie que $\psi_n' \equiv 0$ sur $|x| \leq n$ et $|x| \geq n + 1$. Donc, sur tout compact, ψ_n' tend vers 0 et ψ_n tend vers 1, uniformément. Il vient donc que ψ_n tend simplement vers la fonction 1, et que ψ_n' tend vers la fonction nulle. Plus généralement, $\psi_n^{(m)}$ tend simplement vers 0 pour $m \geq 1$, mais la suite de fonctions

ψ_n ne satisfait pas au premier alinéa de la définition 3.4. Ainsi, on aurait pu penser, s'inspirant de la définition 3.3, que la définition de la convergence séquentielle s'écrirait aussi pour tout compact K, au lieu de le particulariser dans la définition 3.4. Cet exemple prouve le contraire.

On vérifie ensuite que, comme $x \in L^1_{loc}$, le produit par x de ϕ à support compact est intégrable, donc $x \to \int x\phi(x)dx$ est une forme linéaire, qui vérifie l'inégalité de la définition 3.3 pour $p_0 = 0$ et $C = \int_K |x|dx$. Ainsi $\phi \to \int x\phi(x)dx$ définit une distribution, que l'on note $< x, \phi >$. On a alors

$$< x, \psi'_n >= \int x\psi'_n(x)dx = \int_n^{n+1} x\psi'_n(x)dx + \int_{-n-1}^{-n} x\psi'_n(x)dx = -2n - 2\int_n^{n+1} \psi_n(x).$$

Comme $\int_n^{n+1} \psi_n(x)$ est un nombre fixe, la suite $< x, \psi'_n >$ tend vers $-\infty$. La suite ψ'_n "tend vers 0" au sens unique du deuxième item de la définition 3.4 mais pas du premier, et on a trouvé une distribution (qui est même une fonction) pour laquelle le raisonnement échoue.

Comme on l'a vu grâce à l'exemple de x, l'espace des distributions peut être considéré comme une extension de l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On a la

Proposition 3.1 *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On peut lui associer une distribution sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, notée ${}^d f$, telle que*

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), <^d f, \phi >= \int f\phi dx.$$

Tout d'abord, on vérifie que, comme f est $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, sa restriction à tout compact est L^1. Ainsi, sur le support K de $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, elle est L^1. Comme ϕ est bornée, car continue sur le compact K, on en déduit que $f\phi$ est L^1, et que

$$|\int f\phi dx| \leq \max_{x\in K} |\phi(x)| \int_K |f|dx.$$

La forme linéaire $\phi \to \int f\phi dx$ est donc continue au sens de la définition 3.3. Elle définit une distribution notée ${}^d f$.

Définition 3.5 *(convergence des distributions).*

On dit qu'une suite u_n de distributions dans Ω converge vers u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ quand, pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} < u_n, \phi >=< u, \phi > .$$

Théorème 3.2 *(admis) Si u_n est une suite de distributions telle que, pour toute $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $< u_n, \phi >$ admet une limite, alors cette limite est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$ qui est une distribution.*

On vérifiera plus loin que toute distribution est limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'une suite de fonctions C^∞.

3.1.3 Approximations classiques de la mesure de Dirac et de fonctions de L^1.

Le premier résultat important correspond à l'approximation de la mesure de Dirac par une fonction qui se concentre:

Proposition 3.2 *Soit f_n une suite de fonctions positives de L^1, dont les supports sont contenus dans des boules centrées à l'origine dont le rayon tend vers 0 si n tend vers $+\infty$. Alors*

$$\frac{1}{\int f_n dx} f_n \to \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Preuve Soit a_n le rayon de la boule, $a_n \to 0$. On vérifie que

$$< f_n, \phi >= \int_{\mathbf{R}^d} f_n(x)\phi(x)dx a_n \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)\phi(a_n t)dt.$$

On écrit

$$\frac{< f_n, \phi >}{< f_n, 1 >} - \phi(0) = \frac{a_n \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)(\phi(a_n t) - \phi(0))dt}{a_n \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)dt}.$$

On utilise $\phi(a_n t) - \phi(0) = a_n t \int_0^1 \phi'(a_n t u)du$, puis l'inégalité, pour $a_n < 1$ et $|t| \leq 1$,

$$|\phi(a_n t) - \phi(0)| \leq a_n \max_{|x|\leq 1} |\phi'(x)|$$

pour trouver

$$|\frac{< f_n, \phi >}{< f_n, 1 >} - \phi(0)| \leq a_n \max_{|x|\leq 1} |\phi'(x)|.$$

La convergence est démontrée.

Proposition 3.3 *Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On introduit, pour tout n entier positif,*

$$f_n(x) = n^d f(n(x-a))$$

La fonction f_n définit une suite de distributions sur $\mathbb{R}^d$, qui converge vers la distribution $(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)dx)\delta_a$.

La preuve est identique à celle de la proposition 3.2.

Remarque: l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ muni de la topologie engendrée par les semi-normes $\max_{|\alpha|\leq p_0, x\in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$, pour tout p_0 et K, est aussi noté $\mathcal{D}(\Omega)$.

On énonce maintenant un résultat sur L^1. On note $\chi_\varepsilon(u)$ la fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, à support compact contenu dans $B(0,\varepsilon)$, définie par

$$\chi_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-d}\chi(\frac{u}{\varepsilon}).$$

La fonction χ, élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, supportée dans $B(0,1)$, d'intégrale 1, est une fonction "de base" en théorie des distributions, et la suite χ_ε vérifie les hypothèses de la proposition 3.3. Alors $\chi_\varepsilon \to \delta_0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Cette suite de fonctions s'appelle une approximation de l'identité, comme le montre le résultat suivant:

Proposition 3.4 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit*

$$f_\varepsilon(x) = (f \star \chi_\varepsilon)(x)$$

Cette fonction est élément de $C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$||f - f_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \to 0.$$

Preuve On admet que C_0^0 est dense dans L^1. Ainsi il existe une suite f_n déléments de C_0^0 convergeant vers f dans L^1. On a

$$||f - f_\varepsilon||_{L^1} \leq ||f - f_n||_{L^1} + ||f_n - f_n \star \chi_\varepsilon||_{L^1} + ||(f_n - f) \star \chi_\varepsilon||_{L^1}.$$

De $||f \star g||_{L^1} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^1}$, on déduit

$$||f - f_\varepsilon||_{L^1} \leq ||f - f_n||_{L^1}(1 + ||\chi||_{L^1}) + ||f_n - f_n \star \chi_\varepsilon||_{L^1}$$

Soit $\alpha > 0$. On fixe n tel que $||f - f_n||_{L^1} \leq \frac{\alpha}{2(1+||\chi||_{L^1})}$. Le n étant ainsi choisi, on étudie le terme $||f_n - f_n \star \chi_\varepsilon||_{L^1}$ et considère ε vers 0. Comme f_n est continue, elle est uniformément continue sur son support, qui est compact, ainsi si L est un réel à choisir ultérieurement

$$\forall \alpha > 0 \exists \beta > 0, |x - y| \leq \beta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\alpha}{2L||\chi||_{L^1}}.$$

On voit alors que

$$f_n(x) - (f_n \star \chi_\varepsilon)(x) = \int [f_n(x)\chi_\varepsilon(x - y) - f_n(y)\chi_\varepsilon(x - y)]dy$$

donc, pour $\varepsilon < \beta$ on trouve

$$|f_n(x) - (f_n \star \chi_\varepsilon)(x)| \leq \frac{\alpha}{2L}$$

On suppose $\varepsilon < 1$ et on note M un majorant de la longueur du support de f_n. On choisit alors $L = M + 1$ et on a

$$||f_n - (f_n \star \chi_\varepsilon)||_{L^1} \leq \frac{\alpha}{2}.$$

La démonstration est terminée.

En s'appuyant sur ce résultat, on montre

Lemme 3.1 *On a équivalence, pour f et g deux fonctions de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$:*
(i) $f = g$ p.p.
(ii) $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \int f\phi dx = \int g\phi dx$.

La preuve de ce lemme s'appuie sur la fonction $h = f - g$.

On suppose que (ii) est vrai. On considère $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\tilde{h} = h1_{B(x_0,r)}$ où r est un réel positif fixé. On considère alors $h \star \chi_\varepsilon(x)$. On sait que

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(y)\chi_\varepsilon(x - y)dy = 0$$

ceci car la fonction χ_ε est de classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. D'autre part, pour $x-y \in \text{supp}\chi_\varepsilon$, on a $|x-y| \leq \varepsilon$. On considère x tel que $|x-x_0| \leq \frac{r}{2}$, ainsi $|y-x_0| < \frac{r}{2} + \varepsilon$. On en déduit

$$\forall x \in B(x_0, \frac{r}{2}), \varepsilon < \frac{r}{2}, \int_{B(x_0,r)} h(y)\chi_\varepsilon(x-y)dy = \int_{\mathbf{R}^d} h(y)\chi_\varepsilon(x-y)dy = 0.$$

On sait que

$$\int_{|x-x_0|\leq\frac{r}{2}} |h(x)|dx = \int_{|x-x_0|\leq\frac{r}{2}} |h(x) - h \star \chi_\varepsilon(x)|dx \leq \int_{\mathbf{R}^d} |h(x) - h \star \chi_\varepsilon(x)|dx.$$

De la proposition 3.1.3 on déduit $||h - h \star \chi_\varepsilon||_{L^1} \to 0$, donc on déduit, passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, que $\int_{|x-x_0|\leq\frac{r}{2}} |h(x)|dx = 0$. Ainsi l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ tels que $|h(x)| \neq 0$ est négligeable, et donc $h = 0$ p.p.

3.1.4 Ordre et support

Dans la liste des définitions de base, on a:

Définition 3.6 *(Restriction)*
Soit u une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert. Pour $\phi \in C_0^\infty(\omega)$, on définit $\tilde{\phi} \in C_0^\infty(\Omega)$ de sorte que $\tilde{\phi}(x) = 0$ dans $\Omega - \omega$. Alors

$$< u|_\omega, \phi >=< u, \tilde{\phi} > .$$

Comme le support de ϕ est un compact K inclus dans ω, on voit que $K \subset \Omega$ est aussi un compact de Ω. La fonction ϕ est de classe C^∞ sur K, et est nulle en dehors de K, ainsi que toutes ses dérivées. Ceci implique le raccordement avec 0 en tout point extérieur de K. On a $\tilde{\phi} \in C_0^\infty(\Omega)$. La définition de la forme linéaire est donc correcte.

Définition 3.7 *(Ordre) Soit u une distribution sur Ω.*
- *Pour chaque compact K, il existe un entier p_K tel que*

$$p_k = \min\{p, \exists C_K, \forall \phi \in C_K^\infty(\Omega), |< u, \phi >\leq C_K \max_{|\alpha|\leq p} ||\partial^\alpha \phi||_K\}.$$

En d'autres termes, lorsque K est fixé, p_K est l'entier optimal pour lequel l'inégalité de la définition 3.3 soit vraie.
- *Si il existe M tel que, pour tout K compact, $p_K \leq M$, alors la distribution est d'ordre fini et son ordre est le plus petit des entiers M possibles.*

Définition 3.8 *(Support)*
Le support S de la distribution u est le complémentaire du plus grand ouvert Θ pour lequel, pour tout compact K inclus dans Θ et pour toute fonction $C_K^\infty(\Omega)$, $< u, \phi >= 0$. Autrement dit, Θ est le plus grand ouvert V tel que $u|_V = 0$.

Définition 3.9 *(Distribution à support compact)*
On dit que u est une distribution à support compact si S est compact. On note l'ensemble des distributions à support compact $\mathcal{E}'(\Omega)$.

3.1.5 Opérations sur les distributions

On ne peut pas faire, en général, le produit de deux fonctions de L^1. En revanche, on peut faire le produit d'une fonction de L^1 et de L^∞, ou le produit de deux fonctions de L^2. La propriété "produit d'une fonction de L^1 et d'une fonction de L^∞" n'est pas vraie pour les distributions. En revanche, on peut définir le produit d'une distribution et d'une fonction C^∞, dans une définition qui généralise le produit L^1, L^∞:

Définition 3.10 *(et proposition)*
Soit $f \in C^\infty(\Omega)$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La distribution fu est définie, pour toute $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, par

$$< fu, \phi >=< u, f\phi > .$$

On prouve que fu est une distribution, telle que si $u_n \in C_0^\infty$ (ou plutôt la distribution associée à u_n) tend vers u au sens des distributions, alors fu_n (qui est une fonction C_0^∞ donc L^1_{loc} donc définit une distribution) tend vers la distribution fu. Soit $\phi \in C_0^\infty(K)$, $K \subset \Omega$. Il existe p et C tels que

$$| < u, \phi > | \leq C \max_{|\alpha| \leq p} ||\partial^\alpha \phi||_K.$$

Si $\phi \in C_0^\infty(K)$ et $f \in C^\infty(\Omega)$, $f\phi \in C_0^\infty(K)$. D'autre part

$$\partial^\alpha(f\phi) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} C_\alpha^\beta \partial^\beta \phi \partial^{\alpha-\beta} f.$$

On vérifie alors que

$$||\partial^\alpha(f\phi)||_K \leq 2^{|\alpha|} \max_{|\beta_1| \leq |\alpha|} ||\partial^{\beta_1} f||_K \max_{|\beta_2| \leq |\alpha|} ||\partial^{\beta_2} \phi||_K.$$

On en déduit

$$| < u, f\phi > | \leq [C2^p \max_{|\beta_1| \leq p} ||\partial^{\beta_1} f||_K] \max_{|\alpha| \leq p} ||\partial^\alpha \phi||_K.$$

La forme linéaire $\phi \rightarrow < u, f\phi >$ est continue donc on a bien défini une distribution. Enfin, comme $< fu_n, \phi >= \int f(x)u_n(x)\phi(x)dx = \int u_n(x)(f\phi)(x)dx =< u_n, f\phi >$, on en déduit que $< fu_n, \phi > \rightarrow < u, f\phi >$ donc fu_n tend vers fu au sens des distributions.

Lemme 3.2 *Une distribution de $\mathcal{E}'$ peut être prolongée à $C^\infty(\Omega)$.*

Soit K le support compact de $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. On se donne K' un compact contenant K et K" un compact contenant K' de sorte que il existe χ qui soit égale à 1 sur K' et qui soit supportée dans K". On vérifie que, pour $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$< u, \phi >=< u, \chi\phi > + < u, (1-\chi)\phi > .$$

Comme $(1-\chi)\phi$ est supportée dans un compact contenu dans le complémentaire du support de u, $< u, (1-\chi)\phi >= 0$.

$$\forall \phi \in C_0^\infty, < u, \phi >=< u, \chi\phi > .$$

On **définit** alors $< u, f >$ pour $f \in C^\infty$ par

$$< u, f >=< u, \chi f > .$$

Comme χf est $C_0^\infty(\Omega)$, $< u, \chi f >$ est bien définie. De plus,

$$||\partial^\alpha(\chi f)|| \leq C \max_{|\beta|\leq|\alpha|} ||\partial^\beta f||_{K"}.$$

On en déduit une définition de la continuité dans $C^\infty(\Omega)$ de $f \to < u, f >$. Cette continuité est caractérisée par une convergence sur tout compact de f_n et des dérivées de f_n vers f et les dérivées de f. Contrairement à la convergence associée aux fonctions à support compact, il n'y a pas ici d'hypothèse sur les supports. On a aussi

Lemme 3.3 *Toute distribution à support compact est d'ordre fini.*

On rappelle l'égalité $< u, \phi >=< u, \phi(1-\chi) > + < u, \phi\chi >=< u, \phi\chi >$, où $\phi\chi$ est supportée dans $K"$. Il existe alors un entier N_0 et une constante C_0, tous les deux associés à la majoration de $< u, l >$ pour $l \in C_0^\infty(K")$, telles que

$$| < u, \phi > | \leq C_0 \max_{|\alpha|\leq N_0} \max_{x\in K"} |\partial^\alpha(\phi\chi)|.$$

Comme pour la démonstration de la cohérence de la définition 3.10, l'application de la formule de Leibniz

$$\partial^\alpha(\phi\chi) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_\alpha^\beta \partial^\beta\phi\partial^\gamma\chi$$

et les majorations uniformes, pour $|\gamma| \leq N_0$, de $\partial^\gamma\chi$ par $||\chi||_{N_0} = \max_{x\in K",|\gamma|\leq N_0}$, ainsi que l'identité $\sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_\alpha^\beta = 2^{|\alpha|}$ permettent d'obtenir une constante C telle que

$$C_0 \max_{|\alpha|\leq N_0} \max_{x\in K"} |\partial^\alpha(\phi\chi)| \leq C \max_{|\alpha|\leq N_0} \max_{x\in \mathrm{supp}\phi} |\partial^\alpha\phi(x)|$$

et donc

$$| < u, \phi > | \leq C \max_{|\alpha|\leq N_0} \max_{x\in \mathrm{supp}\phi} |\partial^\alpha\phi(x)|.$$

Le lemme 3.3 est démontré.

3.2 Opérations sur les distributions

Nous démontrons ici que toute distribution est dérivable, comme cela a été par exemple vu avec les mesures de Radon. On a la

Définition 3.11 *Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La dérivée partielle de u par rapport à x_j est la forme linéaire*

$$\phi \to - < u, \frac{\partial\phi}{\partial x_j} > .$$

Elle est notée $\partial_{x_j}u$ ou $\frac{\partial u}{\partial x_j}$.

Lemme 3.4 *$\partial_{x_j}u$ est une distribution.*

Preuve Pour tout K compact, il existe N et C_K tel que, pour $\tilde{\phi} \in C_K^\infty(\Omega)$:

$$|<u, \tilde{\phi}>| \leq C_K \max_{|\alpha|\leq N} \max_{x\in K} |\partial_x^\alpha \tilde{\phi}(x)|.$$

On prend $\phi \in C_K^\infty(\Omega)$. Alors $\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \in C_K^\infty(\Omega)$, et on applique l'inégalité précédente à $\tilde{\phi} = \partial_{x_j}\phi$. Ainsi, notant δ_j le n-uplet dont la k-ième composante est 0 pour $k \neq j$ et la j-ième composante est 1, on vérifie que

$$|<u, \partial_{x_j}\phi>| \leq C_K \max_{|\alpha|\leq N, x\in K} |\partial_x^{\alpha+\delta_j}\phi(x)|.$$

La longueur de $\alpha+\delta_j$, pour $|\alpha| \leq N$ est alors majorée par $N+1$, ainsi, pour tout α de longueur plus petite que N, $\max_{x\in K} |\partial_x^{\alpha+\delta_j}\phi(x)|$ est majoré par $\max_{|\beta|\leq N+1} \max_{x\in K} |\partial_x^\beta \phi(x)|$. La forme linéaire $\phi \to -<u, \frac{\partial\phi}{\partial x_j}>$ vérifie la définition 3.3.

Lemme 3.5 *Lorsque $u \in C^1(\mathbb{R})$, la distribution $\frac{\partial u}{\partial x}$ (dérivée de la distribution canoniquement associée à la fonction u, identifiées à partir de maintenant lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité) est (la distribution associée à) la dérivée usuelle de u.*

Preuve On suppose que le support de ϕ est inclus dans $[a, b]$. Alors

$$\begin{aligned}
<\frac{\partial u}{\partial x}, \phi> &= -<u, \phi'(x)> \\
&= -\int_a^b u(x)\phi'(x)dx \\
&= -\int_a^b (u\phi)'(x)dx + \int_a^b u'(x)\phi(x)dx \\
&= u(a)\phi(a) - u(b)\phi(b) + <u', \phi> \\
&= <u', \phi>
\end{aligned}$$

la première ligne ici est la définition de $\frac{\partial u}{\partial x}$, la deuxième provient du fait que la distribution associée à u est l'intégrale contre u, la troisième de la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions de C^1, la quatrième du fait que $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

Définition 3.12 *La distribution $\partial^\alpha u$ est donnée par*

$$<\partial^\alpha u, \phi> = (-1)^{|\alpha|} <u, \partial^\alpha \phi>, \alpha \in \mathbb{N}^n$$

Lemme 3.6 *On a $\partial^{\alpha+\beta}u = \partial^\alpha(\partial^\beta u)$.*

Lemme 3.7 *Si $u_n \to u$ dans $\mathcal{D}'$, alors $\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u$ dans $\mathcal{D}'$*

Lemme 3.8 *La dérivée de la fonction de Heaviside H, qui est la fonction continue par morceaux indicatrice de $\mathbb{R}_+$, est δ_0.*

Je démontre le lemme 3.8. Lorsque le support de ϕ est inclus dans $[a, b]$, $a < 0 < b$, on a $<H, \phi> = \int_0^b \phi(x)dx$, d'où

$$<H, \phi'> = \int_0^b \phi'(x)dx = \phi(b) - \phi(0) = -\phi(0).$$

Lorsque le support de ϕ est contenu dans $\mathbb{R}^{*,-}$ ou dans $R^{*,+}$, on a l'égalité $<H, \phi'> = 0$. On en déduit $<H, \phi'> = -<\delta_0, \phi>$ soit $<\frac{\partial H}{\partial x}, \phi> = <\delta_0, \phi>$. On peut aussi le démontrer grâce aux exemples 3.1 et 3.2 et le lemme 3.7. En effet

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_0(\frac{x}{\varepsilon})\phi(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\infty} \psi_0(\frac{x}{\varepsilon})\phi(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi_0(\frac{x}{\varepsilon})\phi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \psi_0(\frac{x}{\varepsilon})\phi(x)dx.$$

D'autre part, $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi_0(\frac{x}{\varepsilon})\phi(x)dx = \varepsilon \int_0^1 \psi_0(t)\phi(\varepsilon t)dt$, qui tend vers 0 car ϕ est bornée sur $[-1,1]$ et ψ_0 est d'intégrale 1. On a les inégalités

$$|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi_0(\frac{x}{\varepsilon})\phi(x)dx| \leq \varepsilon \max_{[-1,1]} |\phi(x)|, |\int_0^{\varepsilon} \phi(x)dx| \leq \varepsilon \max_{[-1,1]} |\phi(x)|,$$

$$|\int_{\mathbb{R}} \psi_0(\frac{x}{\varepsilon})\phi(x)dx| \leq \mathrm{long}(\mathrm{supp}\phi)|\phi|_{\infty}.$$

La suite $\varepsilon \to \psi_0(\frac{x}{\varepsilon})$ tend vers $H(x)$ en tout point de $\mathbb{R}^*$, et tend vers ${}^dH$ au sens des distributions. Donc la dérivée tend vers la dérivée de ${}^dH$. D'autre part, la dérivée de la fonction $\psi_0(\frac{x}{\varepsilon})$ est $\frac{1}{\int_{-1}^1 \phi_0(t)dt}\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(\frac{x}{\varepsilon})$, qui tend vers $\frac{1}{\int_{-1}^1 \phi_0(t)dt}\int_{-1}^1 \phi_0(t)dt\delta_0$. On a donc le résultat.

Après avoir dérivé les distributions, peut-on en calculer une primitive? Cette notion est étroitement liée à la notion de primitive de la fonction test. En effet, si $u' = v$ est l'équation à résoudre, on a $< u, \phi >= - < u', \int \phi >= - < v, \int \phi >$. Il s'agit d'expliciter cette idée.

Lemme 3.9 *Lorsque $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ est d'intégrale égale à 0, il existe une seule fonction $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ telle que $\psi' = \phi$, et il est équivalent de donner l'existence de ψ et d'imposer $\int \phi = 0$.*

Lorsque $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ et θ est une fonction donnée de $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, d'intégrale 1 il existe une seule fonction $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x) = (\int \phi(t)dt)\theta(x) + \psi'(x)$.

La réponse au premier item est donné par $\psi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t)dt$. Cette fonction a son support contenu dans $[\min \mathrm{supp}\phi, +\infty[$, et son support est compact si et seulement si $\int_{\min \mathrm{supp}\phi}^{\max \mathrm{supp}\phi} \phi(t)dt = 0$, car dans ce cas $\psi(x) = \int \phi(t)dt$ pour $x \in [\max \mathrm{supp}\phi, +\infty[$.

La primitive dans le cas général sur ϕ s'obtient en remarquant que $\phi(x) - (\int \phi(t)dt)\theta(x)$ est d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$ et est à support compact.

On vérifie alors que l'on a le résultat suivant:

Lemme 3.10 *Les distributions solution de $u' = 0$ sont les distributions constantes.*

On a $< u, \phi >=< u, \phi - (\int \phi(t)dt)\theta > +(\int \phi(t)dt) < u, \theta >$. Il existe $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ telle que $\phi - (\int \phi(t)dt)\theta = \psi'$ donc $< u, \phi >=< u, \psi' > +(\int \phi(t)dt) < u, \theta >= (\int \phi(t)dt) < u, \theta >$. On en déduit $u =< u, \theta >$.

Ce n'est pas toujours aussi simple:

Lemme 3.11 *Les distributions solution de $xu = 0$ sont de la forme $C\delta_0$.*

En effet, $< u, \phi >=< u, \phi(0)\chi + x\psi >$ d'après le lemme 4.2. On utilise $< u, x\psi >=< xu, \psi >= 0$ pour avoir

$$< u, \phi >=< u, \chi > \phi(0)$$

Le résultat est démontré. Réciproquement, $< xC\delta_0, \phi >= C < \delta_0, x\phi >= 0\phi(0)C = 0$.

Lemme 3.12 *Les distributions solution de $xu = 1$ sont de la forme $vp(\frac{1}{x}) + C\delta_0$. La valeur principale de $\frac{1}{x}$ est la seule solution impaire de $xu = 0$.*

On a en effet $x(u - vp(\frac{1}{x})) = 0$ donc on applique le lemme précédent. D'autres distributions conduisent à $vp(\frac{1}{x})$. Par exemple

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x + i\varepsilon} = vp(\frac{1}{x}) - i\pi\delta_0.$$

Ceci provient de l'égalité

$$\frac{1}{x + i\varepsilon} = \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} - i\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

On a, pour la partie réelle,

$$\int \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}\phi(x)dx = \int \frac{du}{u^2 + 1}\phi(\varepsilon u)$$

qui tend vers $\pi\phi(0)$ par le théorème de la convergence dominée.

D'autre part, décomposant ϕ en partie paire et en partie impaire, on trouve, comme $x\phi_p$ est impaire,

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{x}{x^2+\varepsilon^2}\phi(x)dx &= \int \tfrac{x\phi_i(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx \\
&= \int \tfrac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx \\
&= \int \psi(x)dx - \varepsilon^2 \int \tfrac{\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx \\
&= \int \psi(x)dx - \varepsilon \int \tfrac{\psi(\varepsilon u)}{u^2+1}du.
\end{aligned}$$

La limite est donc $\int \psi(x)dx$, donc

$$< \frac{1}{x + i\varepsilon}, \phi(x) > \to < vp(\frac{1}{x}), \phi > -(\int \frac{du}{1 + u^2}) < \delta_0, \phi > .$$

On termine cette partie par la relation

$$\frac{d}{dx}(^d\ln|x|) = vp(\frac{1}{x}). \tag{3.2.1}$$

qui provient de

$$< \frac{d}{dx}(^d\ln|x|), \phi >= - <^d \ln|x|, \phi' >= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \ln|x|\phi'(x)dx.$$

On applique la formule d'intégrations par parties usuelle sur $[-a, -\varepsilon]$ et sur $[\varepsilon, a]$, ainsi

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \ln|x|\phi'(x)dx = -\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx + \ln\varepsilon[\phi(-\varepsilon) - \phi(\varepsilon)]$$

et le dernier terme tend vers 0, car $\phi(-x) - \phi(x)$ est $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et s'annule en 0, donc s'écrit $x\psi(x)$, et $\varepsilon \ln\varepsilon \to 0$. On reconnait dans le premier terme $< g_\varepsilon, \phi >$, d'où le résultat.

Chapter 4

Des exemples usuels de théorie des distributions

Dans ce chapitre, nous appliquons les notions introduites dans le chapitre précédent à des exemples naturels, distributions associées à des puissances, ... Nous faisons une liste de tout ce qu'il est possible d'introduire aisément.

4.1 Les formes linéaires élémentaires sur $C_0^\infty(\Omega)$(Inventaire à la Prévert)

Exemple 4.1 *Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Nous introduisons la forme linéaire, notation pour la dérivée $\frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_1...\partial^{\alpha_n}x_n}$, où $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$:*

$$\phi \to \partial^\alpha \phi(a).$$

Elle vérifie (K compact de $\mathbb{R}^n$)

$$\forall K \subset \Omega, \forall \phi \in C_K^\infty(\Omega), |\partial^\alpha \phi(a)| \leq \max_{x \in K, |\beta| \leq |\alpha|} |\partial^\beta \phi(x)|.$$

On la note $(-1)^{|\alpha|}\delta_a^\alpha$, de sorte que

$$< (-1)^{|\alpha|}\delta_a^\alpha, \phi >= \partial^\alpha \phi(a).$$

L'inégalité est triviale si $a \notin K$, puisque dans ce cas la valeur de la forme linéaire est 0, et elle est vraie pour $a \in K$ car on a inclus le maximum de $\partial_x^\alpha \phi(x)$ dans le second membre.

Exemple 4.2 *Soit f une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (localement intégrable). L'application*

$$\phi \to \int f(x)\phi^{(m)}(x)dx$$

est une forme linéaire continue sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$, vérifiant: pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe une constante C_K telle que

$$|\int f(x)\phi^{(m)}(x)dx| \leq C_K \max_{x \in K} |\phi^{(m)}(x)|.$$

(On peut prendre $C_K = \int_K |f|dx$). La distribution $(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta_a$ est la limite, pour la topologie induite, de la suite de distributions associées aux fonctions de classe C^∞ suivantes:

$$u_\varepsilon^{\alpha,a}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|+n}} \frac{1}{(\int_{-1}^1 \phi_0(t)dt)^n} \prod_{i=1}^{i=N} \partial_{x_i}^{\alpha_i}\phi_0(\frac{x_i - a_i}{\varepsilon}).$$

Ceci s'exprime dans le

Lemme 4.1 *Pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, lorsque $\varepsilon \to 0$,*

$$\int_{\mathbf{R}^n} u_\varepsilon^{\alpha,a}(x)\phi(x)dx \to < (-1)^{|\alpha|}\delta_a^\alpha, \phi > .$$

L choix $\varepsilon = \frac{1}{p}$ pour $p \in \mathbb{N}$, permet de construire une suite qui converge. La preuve de cette convergence s'appuie sur l'égalité, provenant de $|\alpha|$ intégrations par parties

$$\int_{\mathbf{R}^n} u_\varepsilon^{\alpha,a}(x)\phi(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^{n+|\alpha|}} \frac{1}{(\int_{-1}^1 \phi_0(t)dt)^n} \prod_{i=1}^{i=n} \int_{\mathbf{R}} \varepsilon^{\alpha_i}(-1)^{\alpha_i}\phi_0(\frac{x_i - \alpha_i}{\varepsilon})\partial_x^\alpha\phi(x)dx_i.$$

Le changement de variable naturel $t_i = \frac{x_i - a_i}{\varepsilon}$ conduit à

$$\int_{\mathbf{R}^n} u_\varepsilon^{\alpha,a}(x)\phi(x)dx = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(\int_{-1}^1 \phi_0(t)dt)^n} \int_{\mathbf{R}^n} \partial^\alpha\phi(a + \varepsilon t) \prod \phi_0(t_i)dt.$$

La convergence de $\partial^\alpha\phi(a + \varepsilon t)$ vers $\partial^\alpha\phi(a)$ et le fait que $\partial^\alpha\phi(a + \varepsilon t)$ soit majoré par $\max_K \partial^\alpha\phi(x)$ permet d'appliquer le théorème de la convergence dominée, ce qui conduit au résultat.

Lorsque $\alpha = 0$, on appelle la forme linéaire obtenue la mesure de Dirac en a ou la distribution de Dirac en a. On généralise la mesure de Dirac à toute mesure de Radon. On définit celles-ci:

Définition 4.1 *Une mesure de Radon μ sur Ω est une mesure positive sur l'ensemble des boréliens de Ω attribuant une valeur finie à tout compact.*

On note par exemple que la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}^n$ attribue la valeur 1 à tout borélien contenant le point a et 0 sinon.

Exemple 4.3 *La forme associée à la dérivée α-ième d'une mesure de Radon μ sur Ω, notée $\partial^\alpha\mu$, est l'application de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ qui à ϕ fait correspondre*

$$\int_\Omega (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\phi(x)d\mu(x).$$

C'est une forme linéaire sur C_0^∞. Si $K \subset \Omega$ est compact, on a l'inégalité, dûe au fait que μ charge de manière finie les compacts:

$$|\int_\Omega (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\phi(x)d\mu(x)| \leq \mu(K) \max_{x\in K} |\partial^\alpha\phi(x)|.$$

En particulier, la notation $\partial^\alpha\mu$ provient du fait que, si μ est une mesure définie par une densité $p(x)$ qui est de classe C^k, alors $d\mu(x) = p(x)dx$ et on a, pour $|\alpha| \leq k$:

$$\int_\Omega (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\phi(x)d\mu(x) = \int_\Omega (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\phi(x)p(x)dx = \int_\Omega \partial^\alpha p(x)\phi(x)dx.$$

Cette forme linéaire est associée à la mesure de densité $\partial^\alpha p$.

Proposition 4.1 *Toutes les formes linéaires sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ construites dans cette section sont des distributions au sens de la définition 3.1.*

Cette proposition est une conséquence immédiate de la définition 3.3 et du fait que la suite ϕ_n tende vers 0 dans le compact fixe K, ce qui, avec la majoration de la définition 3.3, permet d'obtenir $< u, \phi_n > \to 0$.

4.2 Quelques distributions historiques

La distribution $vp(\frac{1}{x})$ La fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, car $\int_{-1}^1 |\frac{1}{x}|dx = +\infty$. On introduit les deux fonctions

$$\begin{array}{l} f_\varepsilon(x) = \frac{1}{x}1_{|x|\geq\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}1_{|x|<\varepsilon} \\ g_\varepsilon(x) = \frac{1}{x}1_{x\geq\varepsilon}. \end{array}$$

Ce sont deux suites d'éléments de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, qui ne convergent pas, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers un élément de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. En revanche, **la suite de distributions ${}^d g_\varepsilon$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution, que l'on appelle valeur principale de $\frac{1}{x}$, que l;on note $vp(\frac{1}{x})$.**

On présente plusieurs démonstrations.

1. utilisation de l'imparité de $\frac{A}{x}$.

   Soit $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On suppose le support de ϕ inclus dans $[-a, a]$. Alors

$$\begin{array}{ll} \int f_\varepsilon(x)\phi(x)dx & = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\phi(x)dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a}\frac{\phi(x)}{x}dx \\ & = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\phi(x)dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx, \end{array}$$

$$\int g_\varepsilon(x)\phi(x)dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a}\frac{\phi(x)}{x}dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx.$$

   Les deux égalités sont vraies car $\int_{\varepsilon\leq|x|\leq a}\frac{\phi(0)}{x}dx = 0$.

   La formule de Taylor avec reste intégral est

$$\phi(x) = \phi(0) + x\int_0^1 \phi'(xt)dt$$

   ainsi on trouve

$$\forall x \in [-a, a], |\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}| \leq \max_{y\in[-a,a]}|\phi'(y)|.$$

   La fonction $x \to \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}$ est dans $L^1([-a, a])$. Alors

$\lim_{\varepsilon\to 0}\int f_\varepsilon(x)\phi(x)dx = 2\phi(0) + \int_{|x|\le a}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx,$

$\lim_{\varepsilon\to 0}\int g_\varepsilon(x)\phi(x)dx = \int_{|x|\le a}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx.$

ceci car $\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\phi(x)dx = \int_{-1}^{1}\phi(\varepsilon t)dt$. On conclut par le théorème de la convergence dominée.

2. utilisation du lemme d'Hadamard

Lemme 4.2 *Soit $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$.*
• *Si $\phi(0)=0$, il existe une fonction $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x)=x\psi(x)$*
• *Si $\phi(0)\neq 0$, pour chaque fonction $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\chi(0)=1$, il existe $\psi_\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x)=\phi(0)\chi(x)+x\psi_\chi(x)$.*

Le premier item se démontre en utilisant $\phi(x)=0+x\int_0^1\phi'(xt)dt$, formule de Taylor avec reste intégral. Le deuxième item se démontre en appliquant le premier item à $\phi(x)-\phi(0)\chi(x)$, et on a

$$\psi_\chi(x)=\int_0^1[\phi'(xt)-\phi(0)\chi'(xt)]dt.$$

Remarque: l'introduction de χ est rendue nécessaire par le fait que $x\to\phi(x)-\phi(0)$ n'est pas une fonction à support compact.

On emploie directement le deuxième item. Alors

$$\int_{\varepsilon\le|x|\le a}\frac{\phi(x)}{x}dx=\int_{\varepsilon\le|x|\le a}[\psi_\chi(x)+\phi(0)\frac{\chi(x)}{x}]dx.$$

On fixe alors χ paire, ainsi $\frac{\chi(x)}{x}$ impaire et son intégrale est nulle, il reste donc

$$\int_{\varepsilon\le|x|\le a}\frac{\phi(x)}{x}dx=\int_{\varepsilon\le|x|\le a}\psi_\chi(x)\to_{\varepsilon\to 0}\int\psi_\chi(x)dx.$$

3. On peut aussi utiliser le lemme d'Hadamard sur la partie paire et impaire de ϕ. En effet,

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon\le|x|\le a}\frac{\phi(x)}{x}dx &= \int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx+\int_\varepsilon^a\frac{\phi(x)}{x}dx\\ &= -\int_\varepsilon^a\frac{\phi(-x)}{x}dx+\int_\varepsilon^a\frac{\phi(x)}{x}dx\\ &= \int_\varepsilon^a\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}dx.\end{aligned}$$

La fonction $\phi(x)-\phi(-x)$ est $C_0^\infty(\mathbb{R})$, s'annule en $x=0$, et est donc de la forme $x\psi(x)$, avec $\psi(x)=\int_0^1(\phi'(xt)+\phi'(-xt))dt$. On peut alors écrire

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|x|\le a}\frac{\phi(x)}{x}dx=\int_0^a\psi(x)dx.$$

Cette présentation est équivalente à écrire $\phi=\phi_p+\phi_i$ et à remarquer que $\frac{\phi_p(x)}{x}$ est impaire, donc son intégrale sur un support symétrique est nulle.

On calcule $xvp(\frac{1}{x})$, et on vérifie que cette distribution vaut 1.

Tout d'abord, si ϕ a son support entièrement contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ ou dans $\mathbb{R}_-^*$, on voit que $< vp(\frac{1}{x}), \phi > = < \frac{1}{x}, \phi >$, d'où $xvp(\frac{1}{x}) = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ ou dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.

Ensuite

$$< xvp(\frac{1}{x}), \phi > = < vp(\frac{1}{x}), x\phi > = \int_{\mathbf{R}} \phi_p(x)dx$$

(car on vérifie que la partie impaire de $x\phi$ est $x\phi_p$), et on constate que $\int_{\mathbf{R}} \phi_p(x)dx = \int_{\mathbf{R}} \phi(x)dx$. On en déduit

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), < xvp(\frac{1}{x}), \phi > = \int_{\mathbf{R}} \phi(x)dx = < 1, \phi > .$$

On en déduit, utilisant l'unicité du représentant dans L^1_{loc} d'une distribution, $xvp(\frac{1}{x}) = 1$ dans $\mathcal{D}'$. Notons que c'est faux dans L^1, car $xvp(\frac{1}{x})$ n'est pas défini dans L^1.

Déterminons l'ordre de cette distribution. On voit, par l'égalité $\psi(x) = \int_0^1 (\phi'(xt) + \phi'(-xt))dt$, que $vp(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre au plus 1. Si elle était d'ordre 0, on aurait

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) | < vp(\frac{1}{x}), \phi > | \leq C \max_y |\phi(y)|.$$

On prend ϕ_n paire, $0 \leq \phi_n(x) \leq 1$ égale à 1 sur $[1, n]$ et nulle sur $[0, 1[\cup]n+1, +\infty[$. On trouve alors $< vp(\frac{1}{x}), \phi_n(\frac{x}{n}) > = < vp(\frac{1}{x}), \phi_n > \geq \ln n$ ce qui donne $\ln n \leq C$ pour tout n, puisque C doit être indépendante de ϕ, et que le support de $\phi_n(\frac{x}{n})$ est inclus dans le compact fixe $[-2, 2]$, ce qui est impossible. La distribution $vp(\frac{1}{x})$ est exactement d'ordre 1.

4.3 Parties finies des puissances

Dans cette section, on cherche à calculer d'autres intégrales faisant intervenir des fonctions qui ne sont pas L^1_{loc}, par exemple x^α pour $-2 < \alpha < -1$ et $x > 0$.

Définition 4.2 *Pour $\alpha \in]-2, -1[$ la forme linéaire $Pf(x^\alpha)$ donnée par*

$$< Pf(x^\alpha), \phi > = -\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \phi'(x)dx$$

définit une distribution.

La preuve du caractère 'distribution' de cette forme linéaire est immédiate: en effet selon cette définition c'est la dérivée de la distribution associée à la fonction de L^1_{loc} qui est $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Cette distribution a les propriétés suivantes

Proposition 4.2 *1)*

$$< Pf(x^\alpha), \phi > = lim_{\varepsilon \to 0}(\int_\varepsilon^{+\infty} x^\alpha \phi(x)dx - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}\phi(\varepsilon)).$$

2) $xPf(x^\alpha) = {}^d x^{\alpha+1}$, et $({}^d x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)Pf(x^\alpha)$.

Pour prouver le premier item, on vérifie que

$$\int_\varepsilon^a x^\alpha \phi(x)dx = \int_\varepsilon^a x^\alpha \phi(0)dx + \int_\varepsilon^a x\phi'(0)dx + ...$$

(sans préciser le reste de Taylor). Le premier terme vaut $\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, qui tend vers $+\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Il s'agit de la partie infinie de x^α. Plus précisément, on a l'égalité, valable pour ϕ à support compact et $a \notin \text{supp}\phi$:

$$\int_\varepsilon^a x^\alpha \phi(x)dx = [\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\phi(x)]_\varepsilon^a - \int_\varepsilon^a \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\phi'(x)dx = -\frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}\phi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^a \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\phi'(x)dx.$$

La fonction $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est intégrable car $\alpha+1 > -1$, donc définit une distribution. On voit donc apparaitre un terme qui tend vers l'infini (partie infinie), égal à $-\frac{1}{\alpha+1}\varepsilon^{\alpha+1}\phi(\varepsilon)$ et un terme qui reste fini lorsque $\varepsilon \to 0$ ($-\int_\varepsilon^a \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\phi'(x)dx$). On conserve le terme fini et on l'apelle partie finie de x^α.

On démontre que $xPf(x^\alpha) = x^{\alpha+1}$. En effet

$$\begin{aligned} < xPf(x^\alpha), \phi > &= -\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(x\phi' + \phi)dx \\ &= -\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\phi dx - \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+1}\phi' dx \\ &-\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\phi dx + \int_0^\infty x^{\alpha+1}\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\phi dx \\ &= \int_0^\infty x^{\alpha+1}\phi dx \end{aligned}$$

car $x^{\alpha+2}$ est dérivable et on peut appliquer la formule d'intégration par parties sur $[\varepsilon, a]$. Le terme en ε associé est $\varepsilon^{\alpha+2}$, qui tend vers 0 car $\alpha > -2$.

On peut définir de même $Pf(x^\alpha)$ pour $\alpha \in]-n-1, -n[$.

Définition 4.3 *Soit $\alpha \in]-n-1, -n[$. La forme linéaire $Pf(x^\alpha)$ donnée par $< Pf(x^\alpha), \phi >= (-1)^n \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha+1)...(\alpha+n)}\phi^{(n)}(x)dx$ définit une distribution ayant les propriétés identiques à celles de la proposition 4.2, soit par exemple $xPf(x^\alpha) = Pf(x^{\alpha+1})$, avec la convention pour $\alpha > -1$ que $Pf(x^\alpha) = {}^d x^\alpha$.*

Il existe d'autres façons de définir les parties finies. Par exemple, lorsque $-n-1 < \alpha < -n$, $n \geq 1$, on retranche la partie infinie obtenue en écrivant le développement de Taylor de ϕ à l'ordre $n-1$, soit

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{j=n-1} \frac{x^j}{j!}\phi^{(j)}(0) + x^n\psi_n(x),$$

puis on calcule la limite, lorsque $\varepsilon \to 0$, de

$$\int_\varepsilon^{+\infty} x^\alpha \phi(x)dx + \sum_{j=0}^{j=n-1} \frac{\varepsilon^{\alpha+j+1}}{(j+\alpha+1)j!}\phi^{(j)}(0).$$

Cette limite est notée $< Pf(x^\alpha), \phi >$ et définit une distribution d'ordre n.

Les cas $\alpha = -n$ donnent les valeurs principales. Il est nécessaire de juxtaposer les valeurs $x < 0$ et $x > 0$ pour utiliser la parité de $\frac{1}{x}$. On définit ainsi

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx = \int_\varepsilon^\infty \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}dx = 2\int_\varepsilon^\infty \psi_i(x)dx$$

avec $x\psi_i(x) = \phi_i(x)$, partie impaire de ϕ, et $\psi_i(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\phi'(xt)dt$. Cette fonction est dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

De même, pour $\alpha = -2$, on combine les deux arguments. Ainsi

$$\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x^2}dx - \frac{2\phi(0)}{\varepsilon} = \int_\varepsilon^\infty\int_0^1(1-t)[\phi"(xt)+\phi"(-xt)]dt$$

Le membre de droite définit, à la limite $\varepsilon \to 0$, une distribution d'ordre 2, qui est la partie finie de $\frac{1}{x^2}$ en valeur principale.

Pour poursuivre l'étude des parties finies[1] on énonce les résultats suivants: *On rappelle que, pour $\lambda > -1$, l'intégrale $\int_0^A x^\lambda dx$ est définie et égale à $\frac{A^{\lambda+1}}{\lambda+1}$. D'autre part, pour $\lambda \leq -1$, cette intégrale n'est pas définie.*

On introduit alors, par définition:

$$Pf(\int_0^A x^\lambda dx) = \frac{A^{\lambda+1}}{\lambda+1} \textit{ pour } \lambda \neq -1, \log A \textit{ pour } \lambda = -1. \tag{4.3.1}$$

1) Soit g une fonction de classe C^∞ dans $[0,A]$. Proposer une définition pour

$$Pf(\int_0^A g(x)x^\alpha dx).$$

On pourra écrire une formule de Taylor à l'ordre p et choisir convenablement le p, en s'appuyant sur l'égalité (4.3.1).

2) Montrer que, pour tout $l > -\alpha - 2$, l'expression suivante ne dépend pas de l et est définie (on suppose α non entier pour simplifier l'expression).

$$\sum_{k=0}^{k=l}\frac{g^k(0)}{k!}\frac{A^{\alpha+k+1}}{\alpha+k+1} + \int_0^A x^\alpha(g(x) - \sum_{k=0}^{k=l}\frac{g^k(0)}{k!}x^k)dx.$$

On désigne ce nombre par $Pf_1(\int_0^A x^\alpha g(x)dx)$.

3) On note $fP(x_+^\alpha)$ l'application de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour $A > max(supp\phi)$, par

$$< fP(x_+^\alpha), \phi >= Pf_1(\int_0^A x^\alpha\phi(x)dx).$$

Montrer que $fP(x_+^\alpha)$ définit une distribution, dont on donnera un majorant de l'ordre. Donner l'ordre de cette distribution.

4)a) Lorsque $\alpha > 0$, comparer $\int_0^A x^\alpha g'(x)dx$ et $\int_0^A \alpha x^{\alpha-1}g(x)dx$.

b) Lorsque $g(x) = x^k$, comparer $Pf_1(\int_0^A x^\alpha g'(x)dx)$ et $Pf_1(\int_0^A \alpha x^{\alpha-1}g(x)dx)$. Vérifier que la relation obtenue est identique à celle du a). Enoncer l'égalité correspondante. On appelle cette formule formule d'intégrations par parties.

c) Démontrer que la formule d'intégrations par parties est vraie pour $\alpha < -1$ lorsque $g^p(0) = 0$ pour tout p tel que $p + \alpha < 0$. En déduire la formule d'intégrations par parties pour toute fonction g de classe C^∞.

5) En utilisant la question précédente, calculer la dérivée de la distribution $fP(x_+^\alpha)$.

6) Montrer que $fP(x_+^\alpha) = Pf(x_+^\alpha)$ en utilisant la définition de la partie finie suivante:

[1] ces résultats sont extraits du sujet proposé pour le test de mi-cours en 2000

$$< Pf(x_+^\alpha), \phi >= (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)} \phi^{(n)}(x)dx$$

où $n = [-\alpha]$.

7) Résoudre, dans l'espace des distributions, l'équation

$$x^2 u'' = fP(x_+^\alpha).$$

8) Reprendre tous les énoncés précédents pour α *entier négatif, en utilisant le fait que pour le cas* $\lambda = -1$*, la partie finie de* $\int_0^A \frac{dx}{x}$ *est* $\log A$.

Résolution 1) On propose une définition associée à une forme linéaire, de sorte que

$$Pf(\int_0^A x^\alpha (\sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k)dx) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k \frac{A^{\alpha+k+1}}{\alpha+k+1}.$$

Ainsi, on aura

$$Pf(\int_0^A x^\alpha g(x)dx) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{g^k(0)}{k!} \frac{A^{k+\alpha+1}}{k+\alpha+1} + Pf(\int_0^A x^\alpha (g(x) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{g^k(0)}{k\ !} x^k)dx).$$

De plus, on souhaite que cette définition corresponde à l'intégrale usuelle lorsque l'intégrand est intégrable. Ainsi, comme $g(x) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{g^k(0)}{k\ !} x^k = x^{n+1} \int_0^A (1-t)^n \frac{g^{(n+1)}(xt)}{n\ !} dt$, on en déduit que, si $n+1+\alpha > -1$, $x^{\alpha+n+1} \int_0^A (1-t)^n \frac{g^{(n+1)}(xt)}{n\ !} dt$ est intégrable, donc l'intégrale entre $[0, A]$ existe et on peut définir

$$Pf_1(\int_0^A x^\alpha (g(x) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{g^k(0)}{k\ !} x^k)dx) = \int_0^A x^\alpha (g(x) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{g^k(0)}{k\ !} x^k)dx.$$

Ceci donne une définition de Pf, qui est celle de la question 2.

2) Soit l_1 et l_2 deux entiers tels que $l_1 > l_2 > -\alpha - 2$ Alors on a

$$\sum_{k=0}^{l_1} \frac{A^{k+\alpha+1}}{k+\alpha+1} + \int_0^A x^\alpha (g(x) - \sum_{k=0}^{k=l_1} \frac{g^k(0)}{k\ !} x^k)dx$$
$$= \sum_{k=0}^{l_2} \frac{A^{k+\alpha+1}}{k+\alpha+1} + \int_0^A x^\alpha (\sum_{k=l_2+1}^{l_1} \frac{g^k(0)}{k\ !} x^k)dx + \int_0^A x^\alpha (g(x) - \sum_{k=0}^{k=l_1} \frac{g^k(0)}{k\ !} x^k)dx$$

car la fonction $x^\alpha (\sum_{k=l_2+1}^{l_1} \frac{g^k(0)}{k\ !} x^k)$ est intégrable et que son intégrale sur $[0, A]$ vaut $\sum_{k=l_2+1}^{l_1} \frac{A^{k+\alpha+1}}{k+\alpha+1}$.

En reportant sous l'intégrale le terme ainsi obtenu, on trouve

$$\sum_{k=0}^{l_1} \frac{A^{k+\alpha+1}}{k+\alpha+1} + \int_0^A x^\alpha (g(x) - \sum_{k=0}^{k=l_1} \frac{g^k(0)}{k\ !} x^k)dx = \sum_{k=0}^{l_2} \frac{A^{k+\alpha+1}}{k+\alpha+1} + \int_0^A x^\alpha (g(x) - \sum_{k=0}^{k=l_2} \frac{g^k(0)}{k\ !} x^k)dx,$$

ce qu'il fallait démontrer.

3) La linéarité de la forme linéaire est évidente. D'autre part, désignant par $l_0 = E[-\alpha - 1]$, on a $l_0 + 1 > -\alpha - 1$ et $l_0 < -\alpha - 1$ donc l_0 est le plus petit entier

supérieur à $-\alpha-2$. On a ainsi, d'après l'égalité écrite pour l_0, notant $||\phi||_{l_0+1} = \max_{x\in \text{supp}\phi, \alpha\leq l_0+1} |\phi^\alpha(x)|$, la majoration

$$< fP(x_+^\alpha), \phi > | \leq (\sum_{k=0}^{l_0+1} \frac{A^{\alpha+k+1}}{k\,!(\alpha+k+1)})||\phi||_{l_0+1}.$$

Ainsi $fP(x_+^\alpha)$ est une distribution, d'ordre majoré par l_0+1.

La partie difficile est de montrer que l'ordre est exactement l_0+1. Pour cela, il faut identifier une suite de fonctions test ϕ_n telles que toutes les dérivées sont bornées en n pour $k \leq l_0$ et pour laquelle la dérivée d'ordre l_0+1 n'est pas bornée, et montrer que la suite tend vers 0, ce qui serait en contradiction avec l'existence de C telle que $| < fP(x_+^\alpha), \phi > | \leq C \max_{k\leq l_0} ||\phi^k||$. Je propose $\psi_n(x)$ telle que $\psi_n^{l_0}(x) = \frac{(x+\frac{1}{n})^{-\alpha'-l_0-1}}{-\alpha'-l_0-1}$, où α' est proche de α. On vérifie que $\psi_n^{(l_0+1)}(x) = (x+\frac{1}{n})^{-\alpha'-l_0-2}$, qui vaut $n^{2+\alpha'+l_0}$ en $x=0$. Comme $2+\alpha'+l_0 > 0$, cette suite tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Mais ce n'est pas une fonction test. Pour créer une fonction test, on considère une fonction χ_n, qui vaut 1 sur $[-\frac{1}{4n}, 1]$, à support compact dans $[-\frac{1}{2n}, 2]$, et on introduit

$$\phi_n(x) = x^{l_0+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{l_0}}{l_0\,!} \chi_n(xt)(xt+\frac{1}{n})^{-\alpha'-l_0-2} dt.$$

Toutes les dérivées $p-$ièmes de ϕ_n, avec $p \leq l_0$ sont bornées en n. La dérivée l_0+1 a son maximum inférieur à la valeur en 0, qui est $n^{2+\alpha'+l_0}$, et l'intégrale vaut

$$\int_0^A x^{\alpha+l_0+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{l_0}}{l_0\,!} \chi_n(xt)(xt+\frac{1}{n})^{-\alpha'-l_0-2} dt.$$

Comme les fonctions sont positives, on peut minorer par la valeur par l'intégrale sur $[0, \frac{1}{2n}]$, ce qui donne

$$\int_0^{\frac{1}{2n}} x^{\alpha+l_0+1} (\frac{3}{2n})^{-\alpha'-l_0-2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{l_0}}{l_0\,!} dt = K(\frac{3}{2n})^{-\alpha'-l_0-2} (\frac{1}{2n})^{\alpha+l_0+2} = \tilde{K} n^{\alpha-\alpha'}.$$

Il suffit alors de prendre $l_0+2 > -\alpha > -\alpha' > l_0+1$ pour que l'intégrale ci-dessus tende vers $+\infty$, alors que le maximum des dérivées d'ordre l_0 au plus est borné.

4) a) Lorsque $\alpha > 0$, $x^{\alpha-1}$ est intégrable, donc la formule d'intégrations par parties sur $[\epsilon, A]$ est valable, ce qui s'écrit

$$\int_\epsilon^A x^\alpha g'(x) dx = A^\alpha g(A) - \epsilon^\alpha g(\epsilon) - \int_\epsilon^A \alpha x^{\alpha-1} g(x) dx$$

et la limite $\epsilon \to 0$ donne

$$\int_0^A x^\alpha g'(x) dx = A^\alpha g(A) - \int_0^A \alpha x^{\alpha-1} d(x) dx.$$

b) Par la définition employée, on sait que le polynôme de Taylor de x^k à l'ordre $l = \max(k, l_0)$ est x^k (et celui de x^{k-1} aussi) donc

$$Pf_1(\int_0^A x^\alpha g'(x) dx) = k \frac{A^{\alpha+k-1+1}}{\alpha+k}.$$

$$Pf_1(\int_0^A \alpha x^{\alpha-1} g(x)dx = \alpha \frac{A^{\alpha-1+k+1}}{\alpha-1+k+1}$$

ce qui donne

$$Pf_1(\int_0^A x^\alpha g'(x)dx) = A^\alpha g(A) - Pf_1(\alpha x^{\alpha-1} g(x)dx).$$

c) On suppose donc que $g^{(p)}(0) = 0$ pour tout p, $p+\alpha < 0$. Ainsi $g(x) = x^{p_0+1}h(x)$, où $p_0 + 1 + \alpha > 0$, $p_0 + \alpha < 0$. Cela donne alors $g'(x) = (p_0 + 1)x^{p_0} h(x) + x^{p_0+1}h'(x)$ et (en utilisant la remarque (4.3.2) ci-dessous)

$$\begin{aligned} Pf_1(\textstyle\int_0^A x^\alpha g'(x)dx) &= Pf_1(\textstyle\int_0^A x^{\alpha+p_0}[(p_0+1)h(x) + xh'(x)]dx \\ &= \textstyle\int_0^A x^{\alpha+p_0}[(p_0+1)h(x) + xh'(x)]dx \end{aligned}$$

la dernière égalité étant vraie car $\alpha + p_0 > -1$.

On traite le terme $\int_0^A x^{\alpha+p_0+1}h'(x)dx$. En utilisant a), ce terme vaut $A^{\alpha+p_0+1}h(A) - (\alpha + p_0 + 1)\int_0^A x^{\alpha+p_0}h(x)dx$. En reportant dans l'égalité précédente, on trouve

$$\begin{aligned} Pf_1(\textstyle\int_0^A x^\alpha g'(x)dx) = \quad & A^{\alpha+p_0+1}h(A) + \textstyle\int_0^A x^{\alpha+p_0}[(p_0+1)h(x) + xh'(x)]dx \\ & - \textstyle\int_0^A (\alpha + p_0 + 1)\int_0^A x^{\alpha+p_0}h(x)dx \end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$Pf_1(\int_0^A x^\alpha g'(x)dx = A^\alpha g(A) - Pf_1(\int_0^A \alpha x^{\alpha-1} g(x)dx.$$

Pour une fonction g générale, on écrit

$$g(x) = \sum_{p=0}^{p=E(-\alpha-1)} \frac{g^p(0)}{p\,!} x^p + h(x)$$

où la fonction h vérifie la même hypothèse que dans le début du c). Ainsi on a

$$Pf_1(\int_0^A x^\alpha h'(x)dx) = A^\alpha h(A) - Pf_1(\int_0^A \alpha x^{\alpha-1} h(x)dx).$$

Grâce au b), on trouve que

$$\begin{aligned} & Pf_1(\textstyle\int_0^A x^\alpha (\sum_{p=0}^{p=E(-\alpha-1)} \frac{g^p(0)}{p\,!} x^p)' dx) = \\ & A^\alpha \textstyle\sum_{p=0}^{p=E(-\alpha-1)} \frac{g^p(0)}{p\,!} A^p - Pf_1(\int_0^A \alpha x^{\alpha-1} (\sum_{p=0}^{p=E(-\alpha-1)} \frac{g^p(0)}{p\,!} x^p)dx). \end{aligned}$$

Il suffit d'additionner les deux égalités obtenues pour obtenir la formule d'intégrations par parties dans le cas général.

5) De l'égalité

$$\begin{aligned} < (fP(x_+^\alpha))', \phi > &= - < fP(x_+^\alpha), \phi' > \\ &= -Pf_1(\textstyle\int_0^A x^\alpha \phi'(x)dx) \\ &= -A^\alpha \phi(A) + Pf_1(\textstyle\int_0^A \alpha x^{\alpha-1}\phi(x)dx), \end{aligned}$$

et de la remarque que $A > \max(\mathrm{supp}\phi)$ donc $\phi(A) = 0$, on tire que

$$< (fP(x_+^\alpha))', \phi >= \alpha Pf_1(\int_0^A x^{\alpha-1}\phi(x)dx) = \alpha < fP(x_+^{\alpha-1}), \phi >$$

ce qui donne tout de suite $(fP(x_+^\alpha))' = \alpha fP(x_+^{\alpha-1})$.

6) On suppose supp$\phi \subset [-K, K]$. Ainsi

$$< Pf(x_+^\alpha), \phi >= (-1)^n \int_0^{K+1} \frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)} \phi^{(n)}(x)dx.$$

On a

$$\begin{aligned} < Pf(x_+^\alpha), \phi >= & \tfrac{(-1)^n}{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)} \int_0^{K+1} x^\alpha x^n \phi^{(n)}(x)dx \\ = & \tfrac{(-1)^n}{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)} Pf_1(\int_0^{K+1} x^\alpha (x^n \phi^{(n)}(x))dx) \\ = & \tfrac{(-1)^n}{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)} < fP(x_+^\alpha), x^n \phi^{(n)}(x) > . \end{aligned}$$

En utilisant la définition de $x^n u$ pour u distribution, on trouve que

$$\begin{aligned} (-1)^n < fP(x_+^\alpha), x^n\phi^{(n)}(x) > & =< x^n fP(x_+^\alpha), \phi^{(n)} > \\ & = (-1)^{n-1} < (x^n fP(x_+^\alpha))', \phi^{(n-1)} > \\ & = (-1)^{n-1} < nx^{n-1} fP(x_+^\alpha) + \alpha x^n fP(x_+^{\alpha-1}), \phi^{(n-1)} > . \end{aligned}$$

On a utilisé ici la formule de dérivation montrée au 5).

On montre un résultat intermédiaire

$$Pf_1(\int_0^A x^\alpha (x^k g(x))dx) = Pf_1(\int_0^A x^{\alpha+k} g(x)dx). \tag{4.3.2}$$

Pour cela, on écrit le développement de Taylor de $g(x)$ à un ordre N_0 grand: $g(x) = p_{N_0}(x) + \psi_{N_0+1}(x)$. Ainsi le développement de Taylor de $x^k g(x)$ à l'ordre $N_0 + k$ est $x^k p_{N_0}(x) + x^k \psi_{N_0+1}(x)$. On compare alors les deux formules (on note $p_{N_0}(x) = \sum_{l=0}^{l=N_0} a_l x^l$):

$$Pf_1(\int_0^A x^\alpha (x^k g(x))dx) = \sum_{n=k}^{n=N_0+k} (a_{n-k} \frac{A^{n+\alpha+1}}{n+\alpha+1} + \int_0^A x^\alpha x^k \psi_{N_0+1}(x)dx)$$

$$Pf_1(\int_0^A x^{\alpha+k} g(x)dx = \sum_{l=0}^{l=N_0} (a_l \frac{A^{l+\alpha+k+1}}{l+\alpha+k+1} + \int_0^A x^{\alpha+k} \psi_{N_0+1}(x)dx)$$

d'où l'égalité. On utilise enfin $< xfP(x_+^{\alpha-1}), \phi >= Pf_1(\int_0^{K+1} x^{\alpha-1}(x\phi(x))dx) =< fP(x_+^\alpha), \phi >$ pour écrire

$$(-1)^n < fP(x_+^\alpha), x^n \phi^{(n)}(x) >= (\alpha+n)(-1)^{n-1} < x^{n-1} fP(x_+^{\alpha-1}), \phi^{(n-1)} >$$

ce qui donne, en poursuivant les égalités

$$< Pf(x_+^\alpha), \phi >=< fP(x_+^\alpha), \phi >$$

ce qu'il fallait démontrer.

7) On vérifie que $fP(x_+^{\alpha-2})$ est une solution de cette équation au sens des distributions. En effet, par définition

$$< x^2 fP(x_+^{\alpha-2}), \phi >=< fP(x_+^{\alpha-2}), x^2\phi >= Pf_1(\int_0^A x^{\alpha-2}(x^2\phi(x))dx).$$

Pour montrer l'identité, on utilise (4.3.2), ce qui donne tout de suite le résultat.

Ensuite, $x^2(u'' - fP(x_+^{\alpha-2})) = 0$, donc la distribution $u'' - fP(x_+^{\alpha-2})$ est à support compact $\{0\}$ donc d'ordre fini n_0. On l'écrit

$$v = \sum_{k=0}^{k=n_0} \alpha_k \delta_0^{(k)}$$

donc

$$< x^2 v, \phi >= 0 =< v, x^2\phi >= \alpha_0 * 0 - \alpha_1 * 0 + \alpha_2(2\phi(0)) - \alpha_3(6\phi'(0)) + ... + (-1)^k k(k-1)\alpha_k \phi^{k-2}(0)...$$

On en déduit que $\alpha_k = 0$ pour $k \geq 2$, donc $v = \alpha_0\delta + \alpha_1\delta'$. On désigne par $\phi(x) = \alpha_0 x_+ + \alpha_1 H(x)$, soit

$$\phi(x) = \alpha_0 x + \alpha_1, x > 0, \phi(x) = 0, x < 0$$

Cette fonction est L^1_{loc} et sa dérivée seconde est $\alpha_0\delta_0 + \alpha_1\delta_0'$. Ainsi on trouve

$$u'' - fP(x_+^{\alpha-2}) = (\alpha_0 x_+ + \alpha_1 H(x))"$$

On introduit alors la distribution $u_0 = \alpha_0 x_+ + \alpha_1 H(x) + \frac{fP(x_+^\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}$. On ramène l'équation à $u'' = u_0''$, donc $(u - u_0)' = C$, $(u - u_0 - Cx)' = 0$ donc $u = u_0 + Cx + D$.

La famille de solutions de l'équation est la famille à quatre paramètres α_0, α_1, C, D :

$$u(x) = \frac{fP(x_+^\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} + \alpha_0 x_+ + \alpha_1 H(x) + Cx + D.$$

On note que cela veut dire que u est $\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} x_+^\alpha$ + une fonction affine sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$.

4.4 Instabilité de Rayleigh-Taylor classique

Dans cette section, nous présentons un résultat de recherche sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Cette instabilité apparait lorsqu'un fluide lourd est au dessus d'un fluide léger dans le champ de pesanteur. Cela a fait l'objet du problème donné en cours en 2001.

Nous ne présentons pas ici la méthode pour obtenir l'équation de Rayleigh qui est, dans le cadre d'un fluide de densité $\rho(x)$ dépendant de la profondeur x (le dessus est $x \to -\infty$, le dessous est $x \to +\infty$)

$$-\frac{d}{dx}(\rho(x)\frac{du}{dx}) + k^2(\rho(x)u(x) + \frac{g}{\gamma^2}\rho'(x)u(x)) = 0$$

On définit $H^0(x)$ par $(0 < \rho_1 < \rho_2)$

$$H^0(x) = \left| \begin{array}{l} \rho_2 \text{ si } x < 0 \\ \rho_1 \text{ si } x > 0 \end{array} \right.$$

On se donne $u \in C^0(\mathbb{R})$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, telle que $u' \in L^\infty(\mathbb{R})$ (on rappelle que l'on peut imposer une valeur quelconque de la dérivée en 0 et qu'il y aura égalité presque partout).

1) Définir les distributions associées à

$$H^0(x)\frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx}(H^0(x)\frac{du}{dx}) \quad \frac{dH^0}{dx}u.$$

2) On considère l'équation, au sens des distributions

$$E = -\frac{d}{dx}(H^0(x)\frac{du}{dx}) + k^2 H^0(x)u + \lambda k \frac{dH^0}{dx}u = 0.$$

On considère $\phi \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$.

a) Ecrire l'action de la distribution E sur la fonction test ϕ.

b) Démontrer que la distribution associée à

$${}^{d}(\frac{du}{dx}) - k^2 \int_0^x u(s)ds$$

est une distribution constante de $\mathcal{D}'(]0, +\infty[)$.

c) Déduire du b) que u est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et en déduire $u(x)$ sur $]0, +\infty[$.

d) En effectuant le même raisonnement pour $x < 0$, montrer qu'il existe une constante A telle que

$$(*) \quad u(x) = Ae^{-k|x|}.$$

3) En utilisant l'égalité (*) et l'équation $E = 0$, calculer A en fonction de λ. On discutera selon la valeur de λ. (On pourra, mais ce n'est pas la seule méthode possible, utiliser $\frac{d}{dx}(\phi(x)e^{kx}) = (\phi'(x) + k\phi(x))e^{kx}$.)

4) On considère une fonction $\rho(x)$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $C_0 > 0$ telle que $\frac{1}{C_0} \leq \rho(x) \leq C_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et de plus

$$M = (\int_{-\infty}^0 |\rho(x) - \rho_2|^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int_0^{+\infty} |\rho(x) - \rho_1|^p dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

On rappelle l'inégalité de Hölder,

$$\int_{\mathbf{R}} |fg|dx \leq (\int_{\mathbf{R}} |f|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_{\mathbf{R}} |g|^q dx)^{\frac{1}{q}}$$

lorsque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On considère $\rho_\varepsilon(x) = \rho(\frac{x}{\varepsilon})$.

a) Démontrer l'inégalité suivante

$$| < \rho_\epsilon - H^0, \phi > | \leq M\epsilon^{\frac{1}{p}} ||\phi||_q.$$

où $||\phi||_q$ est la norme de ϕ dans L^q.

b) Calculer la limite au sens des distributions de ρ_ϵ (distribution associée à ρ_ϵ).

c) En déduire la limite au sens des distributions de ρ'_ϵ.

d) Démontrer l'inégalité suivante sur la distribution $T_\epsilon = \rho'_\epsilon - \frac{dH^0}{dx}$:

$$| < T_\epsilon, \phi > | \leq M\epsilon^{\frac{1}{p}} ||\phi'||_q.$$

e) Construire un exemple pour lequel la limite de $\rho(x)$ en $+\infty$ n'est pas ρ_1 mais où pourtant ρ_ϵ tend au sens des distributions vers H^0.

5) Soit u_ϵ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$, telle que u_ϵ et $\frac{du_\epsilon}{dx}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ indépendamment de ϵ et telle que $\int_{\mathbf{R}} (u_\epsilon(x))^2 dx = 1$. On suppose ρ' bornée sur $\mathbb{R}$.

a)Calculer au sens des distributions

$$[-\frac{d}{dx}(H^0(x)\frac{du_\epsilon}{dx}) + k^2H^0(x)u_\epsilon + \lambda k\frac{dH^0}{dx}u_\epsilon] - H^0(x)[-u_\epsilon'' + k^2u_\epsilon].$$

b) Soit $(u_\epsilon, \lambda_\epsilon)$, $\lambda_\epsilon \in [1, 2\frac{\rho_2+\rho_1}{\rho_2-\rho_1}]$, u_ϵ *solution de classe* C^2 *de*

$$-\frac{d}{dx}(\rho_\epsilon(x)\frac{du_\epsilon}{dx}) + k^2\rho_\epsilon(x)u_\epsilon + \lambda_\epsilon k\rho_\epsilon'(x)u_\epsilon = 0.$$

On admet que

$$\exists\epsilon_0 > 0 \textit{ tel que } \forall\eta > 0\exists a > 0, \forall|x| \geq a, \forall\epsilon < \epsilon_0|u_\epsilon(x)| + |u_\epsilon'(x)| < \eta.$$

En multipliant par u_ϵ *l'égalité vérifiée par* u_ϵ *et en intégrant sur* $[-A, A]$, *démontrer*

$$\int_{\mathbf{R}} \rho_\epsilon(x)[(u_\epsilon'(x))^2 + k^2(u_\epsilon(x))^2]dx + \lambda_\epsilon k(u_\epsilon(0))^2(\rho_1 - \rho_2) + \lambda_\epsilon k < T_\epsilon, u_\epsilon^2 >= 0.$$

c) On admettra que l'inégalité de 4 d) est aussi vraie pour $\phi = u_\epsilon$.
Démontrer l'inégalité, pour $p \geq 2$ *(et alors* $q \geq 2$*)*

$$\forall\epsilon < \epsilon_0, ||u_\epsilon||_\infty^2 \geq (u_\epsilon(0))^2 \geq k\frac{\rho_2 - \rho_1}{2C_0(\rho_2 + \rho_1)} - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}M\epsilon^{\frac{1}{p}}||u_\epsilon||_p||u_\epsilon'||_q.$$

d)En admettant que u_ϵ *converge, au sens des distributions, vers* u *et en supposant que* $u_\epsilon(0)$ *converge, démontrer que*

$$u_\epsilon \to Ae^{-k|x|}$$

où $A \neq 0$.
En déduire que λ_ϵ *converge et donner sa limite.*

1) On vérifie que le produit d'une fonction (u') de $L^\infty \cap L^1_{loc}$ et d'une fonction H^0 de L^1_{loc} est dans L^1_{loc}, donc définit une distribution donnée par la relation

$$< H^0u', \phi >= \int H^0u'(x)\phi(x)dx$$

La dérivée au sens des distributions de cette distribution est une distribution, et on a

$$< \frac{d}{dx}(H^0u'), \phi >= -\int H^0u'(x)\phi'(x)dx.$$

Le troisième terme est un peu plus compliqué. En effet, u et une fonction de classe C^0 et $(H^0)'$ est la distribution $(\rho_1 - \rho_2)\delta_0$, donc il faut pouvoir définir le produit d'une distribution d'ordre 0 et d'une fonction continue. Cela se fait par prolongement en remarquant qu'il existe une suite u_n de fonctions C_0^∞ qui converge pour la norme du maximum vers u. Ainsi on a

$$< (H^0)'u_n, \phi >=< (H^0)', u_n\phi >= (\rho_1 - \rho_2)u_n(0)\phi(0) \to (\rho_1 - \rho_2)u(0)\phi(0)$$

donc la distribution $(H^0)'u_n$ (qui est bien définie) converge au sens des distributions vers $(\rho_1 - \rho_2)u(0)\delta_0$.

2) La distribution E est bien définie. Lorsque $\phi \in C_0^\infty(]0,+\infty[)$, on trouve

$$\begin{array}{ll} < E,\phi > & = \int H^0(x)[\phi'(x)u'(x) + k^2u(x)\phi(x)]dx + (\rho_1-\rho_2)u(0) < \delta_0, \phi > \\ & = \rho_1 \int (u'(x)\phi'(x) + k^2 u(x)\phi(x))dx. \end{array}$$

La distribution $u' - k^2\int_0^x u(s)ds$ vérifie

$$\begin{array}{ll} < \frac{d}{dx}(u' - k^2\int_0^x u(s)ds), \phi > & = - < u' - k^2\int_0^x u(s)ds, \phi' > \\ & = - < u', \phi' > + k^2 < \int_0^x u(s)ds, \phi' > . \end{array}$$

La formule d'intégrations par parties est licite puisque $\phi(x)$ et $\int_0^x u(s)ds$ sont des fonctions de classe C^1. Ainsi $< \int_0^x u(s)ds, \phi' >= - < u, \phi >$ donc, de $E = 0$ on déduit

$$< \frac{d}{dx}({}^d u' - k^2\int_0^x u(s)ds), \phi >= 0 \quad \forall\phi.$$

La distribution ${}^d u' - k^2\int_0^x u(s)ds$ est alors une distribution constante. On a donc

$$u' = k^2\int_0^x u(s)ds + C \text{ pp}$$

Cette égalité est une égalité presque partout car on a utilisé le résultat sur l'équivalence de deux distributions définies par des fonctions de L^1_{loc}. Pour obtenir un résultat sur la régularité de u', il est nécessaire de prendre la primitive. On trouve alors $\int_1^x u'(s)ds = k^2\int_1^x\int_0^y u(s)dsdy + C(x-1)$. On sait que la fonction $v(x) = \int_1^x u'(s)ds$ est continue et dérivable car primitive d'une fonction de $L^\infty \cap L^1_{loc}$. Elle est alors de classe C^2 par utilisation de l'égalité démontrée. Sa dérivée seconde est k^2u. On trouve $v(x) = u(x) - u(1)$ car la dérivée de $v - u$ est 0 (la dérivée de v étant u' par définition). Ainsi u est de classe C^2 et on peut dériver l'égalité. On trouve $u'' = k^2u$, donc, pour $x \in]0,+\infty[$, $u(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$. De la condition u' bornée on déduit $u(x) = Ae^{-kx}$ sur $]0,+\infty[$. De même, sur $]-\infty, 0[$, le même résultat s'applique et on trouve $u(x) = Ce^{kx}$. La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ donc la limite de u lorsque x tend vers 0_+ est la même que la limite de u lorsque x tend vers 0_-, donc $A = C$. On a donc

$$u(x) = Ae^{-k|x|}.$$

3) On calcule

$$\begin{array}{ll} < E,\phi > & = \int_{-\infty}^0 \rho_2 kAe^{kx}\phi'(x)dx - \int_0^{+\infty}\rho_1 kAe^{-kx}\phi'(x)dx \\ & +k^2\int_{-\infty}^0 \rho_2 Ae^{kx}\phi(x)dx + k^2\int_0^{+\infty}\rho_1 Ae^{-kx}\phi(x)dx + \lambda k(\rho_1-\rho_2)A\phi(0) \\ & = \int_{-\infty}^0 \rho_2 kA\frac{d}{dx}(\phi(x)e^{kx})dx - \int_0^{+\infty}\rho_1 kA\frac{d}{dx}(\phi(x)e^{-kx})dx + \lambda k(\rho_1-\rho_2)A\phi(0) \\ & = -(\rho_1+\rho_2)kA\phi(0) + \lambda k(\rho_1-\rho_2)A\phi(0) \end{array}$$

On en déduit $A = 0$ ou $\lambda = \frac{\rho_2+\rho_1}{\rho_2-\rho_1}$.

4) L'inégalité demandée provient de l'application de l'inégalité de Holder aux deux intégrales dans l'expression ci-dessous

$$\int_{-\infty}^0 (\rho(x)-\rho_2)\varepsilon\phi(\varepsilon x)dx + \int_0^{+\infty}(\rho(x)-\rho_1)\varepsilon\phi(\varepsilon x)dx.$$

On remarque pour cela que $\varepsilon(\int_0^\infty(|\phi(\varepsilon x)|)^q dx)^{\frac{1}{q}} = \varepsilon\varepsilon^{-\frac{1}{q}}(\int_0^{+\infty}(|\phi(y)|)^q dy)^{\frac{1}{q}}$.

On utilise alors $\int_{\mathbf{R}}(|\phi(y)|)^q dy \leq (\max|\phi|)^q \int_K dy$ où K est le support de ϕ. Ainsi l'inégalité du texte implique que

$$|<\rho_\varepsilon - H^0, \phi>| \leq C\varepsilon^{\frac{1}{p}} \max|\phi|.$$

On en déduit que $\rho_\varepsilon \to H^0$ au sens des distributions et $\frac{d}{dx}(\rho_\varepsilon) \to \frac{dH^0}{dx}$. On a aussi l'inégalité recherchée par application de la relation $< \frac{d}{dx}(\rho_\varepsilon - H^0), \phi >= - < \rho_\varepsilon - H^0, \phi' >$.

Pour le contre-exemple, on considère une fonction qui vaut ρ_1 sur $[n+a_n, n+1-a_{n+1}]$ pour tout n et qui est une fonction de classe C^∞ ressemblant à un chapeau sur $[n-a_n, n+a_n]$ avec comme valeur maximale ρ_2. Alors l'intégrale de $(\rho(x)-\rho_1)^p$ est de l'ordre de a_n donc la convergence de l'intégrale de $(\rho(x)-\rho_1)^p$ équivaut à la convergence de la série a_n. On choisit $a_n = \frac{1}{n^2}$.

5) On note que $-\frac{d}{dx}(H^0(x)\frac{du_\varepsilon}{dx}) + H^0(x)u''_\varepsilon(x) = -\frac{dH^0}{dx}\frac{du_\varepsilon}{dx} = (\rho_2-\rho_1)u'_\varepsilon(0)\delta_0$. Il reste donc

$$[-\frac{d}{dx}(H^0(x)\frac{du_\epsilon}{dx})+k^2H^0(x)u_\epsilon+\lambda k\frac{dH^0}{dx}u_\epsilon]-H^0(x)[-u''_\epsilon+k^2u_\epsilon] = (\rho_1-\rho_2)[\lambda k u_\varepsilon(0)-u'_\varepsilon(0)]\delta_0.$$

La relation suivante s'obtient en prenant la limite dans l'égalité obtenue en intégrant sur $[-A, A]$ et en utilisant le fait que ρ_ε est borné. Le seul terme que nous avons à considérer est le terme tout intégré dans l'intégration par parties. Il vaut $\rho_\varepsilon(A)u_\varepsilon(A)u'_\varepsilon(A)$, et l'hypothèse sur le comportement de u_ε implique qu'il tend vers 0. D'autre part, on utilise $< T_\varepsilon, \phi >=< \rho'_\varepsilon, \phi > -(\rho_1-\rho_2)\phi(0)$, relation que l'on applique à $\phi = u_\varepsilon$. Il faut prendre quelques précautions car u_ε n'est pas à support compact, mais $T_\varepsilon - {}^d\rho'_\varepsilon$ est à support compact, donc on peut appliquer cette dernière distribution à une fonction test qui n'est pas à support compact. Ensuite, on vérifie que les hypothèses sur u_ε impliquent que $< \rho'_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon >$ est bien défini. En effet, on a supposé ρ et ρ' bornées sur $\mathbb{R}$, donc le terme $\int_{\mathbf{R}} \rho'_\varepsilon(u_\varepsilon)^2 dx$ existe (on n'a pas encore l'indépendance par rapport à ε.)

L'inégalité demandée par la suite provient de l'égalité

$$\lambda_\varepsilon(\rho_2-\rho_1)(u_\varepsilon(0))^2 = \int \rho_\varepsilon(x)[(u'_\varepsilon)^2 + k^2(u_\varepsilon)^2]dx + < T_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon >$$

et les majorations $|u_\varepsilon|_p \leq C_p|u_\varepsilon|_2$, $|u'_\varepsilon|_q \leq C_q|u'_\varepsilon|_2$ qui entrainent que $|u'_\varepsilon|_p$ et $|u'_\varepsilon|_q$ sont bornés indépendamment de ε. On en déduit

$$\lambda_\varepsilon(\rho_2-\rho_1)(u_\varepsilon(0))^2 \geq \frac{k^2}{C_0} - M\varepsilon^{\frac{1}{p}}|u_\varepsilon|_p|u'_\varepsilon|_q.$$

L'inégalité cherchée en découle en utilisant la majoration $\lambda_\varepsilon \leq 2\frac{\rho_2+\rho_1}{\rho_2-\rho_1}$.

Pour le dernier point, on vérifie que lorsque $\varepsilon \to 0$, $< u_\varepsilon, \phi > \to < Ae^{-k|x|}, \phi >$. On utilise alors une fonction test ϕ qui vaut 1 en 0 et dont le support se concentre au voisinage de 0, et on utilise le fait que la fonction dans le terme de droite soit continue. Comme u'_ε est bornée indépendamment de ε, il existe un voisinage V_0 de 0 indépendant de ε où (quitte à considérer la solution égale à $\pm u_\varepsilon$ de sorte que, pour chaque ε tel que $u_\varepsilon(0) \neq 0$, ce qui est vrai pour ε assez petit, on ait $u_\varepsilon(0) > 0$) $u_\varepsilon(x) \geq u_\varepsilon(0)/2 > 0$. Toujours du caractère uniforme du majorant de u'_ε, on déduit que, pour chaque α, il existe β tel que, pour $|x| \leq \beta$ on a $u_\varepsilon(x) \geq u_\varepsilon(0)(1-\alpha)$. Ainsi, prenant le support de ϕ inclus dans V_0, et prenant ϕ positive et identiquement égale à 1 sur $[-\beta, \beta]$, on tire que $u_\varepsilon(0)(1-\alpha)2\beta \leq < u_\varepsilon, \phi >$. Passant à la limite en ε, on en déduit que, pour $\varepsilon < \varepsilon_1$, $< u_\varepsilon, \phi > \leq < Ae^{-k|x|}, \phi > (1+\alpha)$. On en déduit un majorant de $u_\varepsilon(0)$ en fonction de A et de α pour ϕ bien choisie. On fait de même pour la minoration et on trouve que $u_\varepsilon(0) \to A$, et $A \neq 0$ par l'inégalité précédente.

La convergence de u_ε s'appuie sur l'égalité

$$\begin{array}{l} < (\rho_\varepsilon - H^0)u'_\varepsilon, \phi' > +k^2 < (\rho_\varepsilon - H^0)u_\varepsilon, \phi > +\lambda_\varepsilon k < T_\varepsilon u_\varepsilon, \phi > \\ + < H^0 u'_\varepsilon, \phi' > +k^2 < H^0 u_\varepsilon, \phi > +\lambda_\varepsilon k(\rho_1 - \rho_2)u_\varepsilon(0)\phi(0) = 0. \end{array}$$

On utilise la convergence vers 0 des trois premiers termes de cette égalité, et on prend $\phi \in C_0^\infty(]0, +\infty[$ pour trouver que la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ de la limite de u_ε vérifie $u'' = k^2 u$. Comme les fonctions u_ε et u'_ε sont bornées uniformément dans L^2, leur limite au sens des distributions est dans L^2. La restriction de la limite à $]0, +\infty[$ est alors bornée et elle vaut donc $A_1 e^{-kx}$. Le même raisonnement s'applique sur $]-\infty, 0[$ et on trouve $u(x) = A_2 e^{kx}$. Enfin, on vérifie que, pour tout $x > y$

$$u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y) = \int_y^x u'_\varepsilon(t)dt \leq \sqrt{x-y} \int_y^x (u')^2 dt)^{\frac{1}{2}}.$$

En prenant $y = 0$, on montre que $u_\varepsilon(x)$ converge ponctuellement pour tout x et que la limite est continue. Ainsi u est bien continue et est la distribution associée à fonction donnée par la limite ponctuelle. On en déduit $A_1 = A_2$. On remplace alors le résultat dans l'égalité limite. Si on extrait de la suite λ_ε une sous-suite convergeant vers λ, on se retrouve pour u dans la situation du 3). On en déduit, puisque $A \neq 0$, que $\lambda = \frac{\rho_2+\rho_1}{\rho_2-\rho_1}$, dont on déduit la convergence de λ_ε puisque toute suite extraite converge vers la même limite. On se reporte à l'équation de Rayleigh pour vérifier que $\lambda = \frac{gk}{\gamma^2}$, où k est le nombre d'onde de l'onde sur le bord et γ son taux de croissance en temps. Il vient $\gamma = \sqrt{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1} gk}$, qui est le taux de croissance classique de Rayleigh.

4.5 Produit de convolution et approximation des fonctions

Nous choisissons de présenter le produit de convolution directement, en considérant le produit de convolution d'une distribution quelconque et d'une distribution à support compact. Le produit de convolution peut être réalisé aussi dans d'autres cas, que nous n'introduirons pas dans ce cours : il faut définir pour cela les supports convolutifs.

Lorsque deux fonctions f et g sont continues à support compact, il est aisé de définir leur produit de convolution $f \star g$:

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

Ceci est possible car on intègre des fonctions continues sur le support de f. On a commutativité, associativité du produit de convolution dans ce cas. Cette définition se généralise grâce au théorème de Fubini :

Théorème 4.1 *Si f et g sont des fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $(f \star g)$ existe dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, et vérifie l'inégalité*

$$||f \star g||_{L^1} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^1}.$$

C'est une application du théorème de Fubini pour la fonction sur $\mathbb{R}^{2d}$ égale à $f(y)g(x-y)$, qui est dans $L^1(\mathbb{R}^{2d})$.

Ainsi il est clair que l'on peut généraliser le produit à une distribution et à une fonction C^∞ à support compact. En effet, si ϕ est une fonction de classe C_0^∞, la fonction ϕ_x définie par

$$\phi_x(y) = \phi(x-y)$$

est une fonction de C_0^∞ et on peut calculer $< u, \phi_x >$.

Définition 4.4 *On appelle produit de convolution de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et de $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ la fonction donnée par*

$$u \star \phi(x) =< u, \phi_x > .$$

Avant d'énoncer les propriétés élémentaires de la convolée d'une distribution et d'une fonction test, nous démontrons un résultat d'intégration et de dérivation sous le signe somme pour les distributions. Nous avons

Proposition 4.3 *Soit u une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ et soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$. Alors on a*

1) On désigne par $\phi(.,y)$ la fonction élément de $C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$ qui à x fait correspondre $\phi(x,y)$. Alors la fonction $< u, \phi(.,x) >$ est une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ (dérivation sous le signe somme formel $\int dxu(x)\phi(x,y)$), et $\partial_y^\alpha(< u, \phi(.,y) >) =< u, \partial_y^\alpha \phi(.,y) >$.

2) On a aussi $\int dy < u, \phi(.,x) >=< u, \int \phi(.,y)dy >$, où la fonction $x \to \int dy\phi(x,y)$ est de classe C^∞ à support compact.

Preuve On calcule le taux d'accroissement pour démontrer la dérivabilité par rapport à $y \in \mathbb{R}$, la démonstration pour toutes les dérivées partielles s'obtient de manière identique.

On écrit ainsi $< u, \phi(.,y+h) > - < u, \phi(.,y) >= h < u, \int_0^1 \partial_y\phi(.,y+th)dt >= h < u, \partial_y\phi(.,y) > + \frac{h^2}{2} < u, \int_0^1 (1-t)\partial_{y^2}^2\phi(.,y+th)dt >$.

Comme u est une distribution, et que la suite ψ_h de fonctions sur $\mathbb{R}^p$ $x \to h\int_0^1(1-t)\phi''(x,y+th)dt$ vérifie les propriétés suivantes: 1) le support de ϕ_h est contenu dans un compact fixe pour tout h ; il suffit pour cela de vérifier que le support de ϕ est contenu dans $B(0,R) \times B(0,R)$, où R est suffisamment grand, ainsi ψ_h est supportée dans $B(0,R)$.

2) lorsque h tend vers 0, ϕ_h tend vers 0 ainsi que toutes les dérivées en x.

En appliquant le théorème 3.1, on montre que $< u, \phi_h >$ tend vers 0. Ainsi la fonction $< u, \phi(.,y) >$ est dérivable et sa dérivée est $< u, \partial_y\phi(.,y) >$.

Le théorème de dérivation sous le signe somme est démontré. Montrons aussi que cette dérivée s'écrit $u' \star \phi$. Ceci est une conséquence du fait que $\phi'_x = -\frac{d}{dy}(\phi_x)$, ce qui entraine que $< u, \phi'_x >= - < u, \frac{d}{dy}(\phi_x) >=< u', \phi_x >= u' \star \phi(x)$.

Pour le théorème d'intégration, on considère A un minorant du support de $\phi(x,y)$ en y pour tout x. On introduit

$$F(y) =< u, \int_A^y \phi(., t)dt > .$$

Utilisant l'alinéa 1, on calcule la dérivée de F, et on trouve $< u, \phi(., y) >$. On a alors

$$F(y) - F(A) = \int_A^y F'(y)dy = \int_A^y < u, \phi(., y) > dy$$

ce qui entraine l'égalité de l'alinéa 2.

On a alors

Lemme 4.3 *La fonction $u \star \phi$ est une fonction de classe C^∞.*

Ce lemme est une conséquence de la proposition précédente.

On arrive à un des points fondamentaux de la théorie des distributions :

Proposition 4.4 *Toute distribution est limite d'une suite de fonctions de classe C^∞. Toute distribution est limite d'une suite de fonctions de classe C_0^∞.*

Par exemple, si ϕ_0 est la fonction de l'exemple 3.1, la suite $u \star [n\phi_0 \circ (nId)]$ est une suite de fonctions C^∞ convergeant au sens des distributions vers $(\int_{-1}^1 \phi_0(t)dt)u$.

Preuve On note ϕ^n la fonction "approximation de l'identité" égale à $n\phi_0(nx)$, fonction paire. Il suffit de vérifier que, par le résultat d'interversion des intégrales (voir la proposition 4.3)

$$\int_{\mathbf{R}^d} < u, \phi^n_x > \phi(x)dx =< u, \phi \star \phi^n >$$

car ϕ^n est paire. Comme, pour ϕ fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R})$, la fonction $\phi \star \phi^n$ tend vers $(\int_{-1}^1 \phi_0(t)dt)\phi$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ (support contenu dans un compact fixe et convergence de toutes les dérivées), on utilise le théorème 3.1 pour montrer la convergence de $< u, \phi \star \phi^n >$ vers $(\int_{-1}^1 \phi_0(t)dt) < u, \phi >$. Toute distribution est alors limite de fonctions de classe C^∞. L'extension au cas multidimensionnel est immédiat.

Pour le deuxième item de la proposition, on introduit une notion souvent utile : on effectue une **troncature et régularisation**. Pour cela, on introduit une fonction plateau χ_j (comme ci-dessus) valant 1 sur $[-j, j]$, supportée sur $[-j - 1, j + 1]$ et on définit la distribution $\chi_j u$, qui est une distribution à support compact. On convole alors cette distribution avec la fonction $\psi_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\phi_0(\frac{t}{\varepsilon})\frac{1}{\int_{\mathbf{R}} \phi_0(u)du}$, et on obtient une fonction de classe C^∞ à support compact. Soit K un compact. On vérifie que, pour tout ε_0, il existe j_0 tel que $K + B(0, \frac{1}{\varepsilon_0})$ soit contenu dans $[-j, j]$ pour $j \geq j_0$. Alors $< (u\chi_j \star \psi_\varepsilon), \phi >=< u \star \psi_\varepsilon, \phi >$, donc, comme $u \star \psi_\varepsilon$ tend vers u par le premier alinéa, la suite $< u \star \psi_\varepsilon, \phi >$ converge vers $< u, \phi >$ lorsque ε tend vers 0. Un choix adéquat de ε en fonction de j permet donc de trouver une suite ϕ_j de fonctions test $\phi_j = u\chi_j \star \psi_{\varepsilon_0 j^{-1}}$ qui converge vers u.

4.6 Produit de convolution $\mathcal{E}', \mathcal{D}'$

Nous allons dans cette section définir le produit de convolution de deux distributions dans le cas où $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

Montrons en premier, pour u distribution quelconque, que $(u\star\phi)\star\psi = u\star(\phi\star\psi)$ pour ϕ et ψ deux fonctions test. Si cette égalité est vraie, en utilisant le fait que toute distribution est limite de fonctions test, on vérifie que ϕ pourra être prise dans $\mathcal{D}'$ et cela donne une idée de la définition de $u\star v$.

On vérifie que $((u\star\phi)\star\psi)(x) = \int(u\star\phi)(y)\psi(x-y)dy$. Pour comprendre les résultats à appliquer, on écrit l'égalité formelle

$$\int dy\psi(x-y)\int u(z)\phi(y-z)dz = ((u\star\phi)\star\psi)(x),$$

ce qui nous donne l'idée d'introduire la fonction test $l(y,z) = \psi(x-y)\phi(y-z)$. Alors $\int dyl(y,z) = \int dy'\phi(y')\psi(x-z-y') = \phi\star\psi(x-z) = (\phi\star\psi)_x(z)$. On remarque que

$$< u, \int dyl(y,.) >=< u, (\phi\star\psi)_x >= (u\star(\phi\star\psi))(x)$$

et, d'autre part,

$$\int < u, l(y,.) > dy = \int \psi(x-y) < u, \phi_y > dy = \int \psi(x-y)(u\star\phi)(y).$$

L'application de la formule d'intégration sous le signe intégrale conduit à l'égalité $(u\star\phi)\star\psi = u\star(\phi\star\psi)$. Ainsi on a

Définition 4.5 *Définition et proposition*
Soit $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $v\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Il existe une seule distribution w telle que

$$\forall\phi\in C_0^\infty, u\star(v\star\phi) = w\star\phi.$$

Cette distribution est notée $w = u\star v$

Pour relier produit de convolution et distribution, on a la relation suivante :

Lemme 4.4 *Soit ϕ une fonction test et u une distribution. On associe à ϕ la fonction $\check{\phi}$ par $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$. Alors on a*

$$< u, \phi >= (u\star\check{\phi})(0).$$

Si $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, le lemme 4.3 indique que $v\star\phi$ est de classe C^∞, et, si ϕ a pour support K compact, notant K_1 le support de la distribution v (ou du moins un compact tel que, pour $K_2\subset CK_1$ et $\phi\in C_0^\infty(K_2)$, $< v,\phi >= 0$), si on prend K et K_1 contenus dans $B(0,R)$ et $|x|\geq 2R+1$, alors $v\star\phi(x) = 0$. La fonction $v\star\phi$ est de classe C^∞ à support compact, donc on peut calculer $u\star(v\star\phi)$.

De l'égalité du lemme 4.4 et de la définition 4.5, on déduit l'égalité

$$< w, \psi >=< u\star v, \psi >= ((u\star v)\star\check{\psi})(0) = (u\star(v\star\check{\psi}))(0).$$

Nous allons montrer que cette égalité définit une distribution, et que si w est définie par l'égalité $< w,\psi >= (u\star(v\star\check{\psi}))(0)$ pour tout ψ, alors w vérifie l'égalité $w\star\phi = u\star(v\star\phi)$.

Une distribution à support compact est d'ordre fini, donc il existe M tel que, utilisant

$$\partial^\alpha_{x^\alpha}(v \star \phi) = u \star \partial^\alpha_{x^\alpha}\phi =< u, (\partial^\alpha \phi)_x >,$$

$$||\partial^\alpha_{x^\alpha}(v \star \phi)||_\infty \leq C \max_{|\beta|\leq|\alpha|+M} ||\partial^\beta_{x^\beta}\phi||_\infty.$$

Lorsque ψ est à support compact inclus dans K, la fonction $v\star\psi$ est aussi à support compact inclus dans un compact $K_1(K)$. On désigne par M_K et C_K une constante et un ordre associés au compact $K_1(K)$ dans la définition de u distribution. Si on note l la fonction test $v \star \check{\psi}$, alors $| < u, \check{l} > |$ est majoré par $C_K \max_{|\delta|\leq M_K} ||\partial^\delta l||$, et en utilisant la majoration de l on trouve

$$| < u, \check{l} > | \leq CC_K \max_{\gamma\leq M+M_K} ||\partial^\gamma \phi||.$$

L'application $u \star v$ est donc une distribution.

Montrons maintenant l'égalité $w \star \phi = u \star (v \star \phi)$ à partir de la relation

$$\forall \psi \in C^\infty_0, < w, \psi >= (u \star (v \star \check{\psi}))(0).$$

Soit $\phi \in C^\infty_0$. On considère

$$w \star \phi(x) =< w, \phi_x >= (u \star (v \star \check{\phi_x}))(0). \qquad (4.6.3)$$

Si on note $l = (v \star \check{\phi_x})$, cette égalité entraine $w \star \phi(x) =< u, \check{l} >$

Notons que, pour ψ donnée, on a $v \star \check{\psi}(-y) =< v, \check{\psi}_{-y} >$. On remplace dans cette égalité ψ par ϕ_x, ce qui donne $(v \star \check{\phi_x})(-y) =< v, (\check{\phi_x})_{-y} >$. Or $(\check{\phi_x})_{-y}(z) = (\check{\phi_x})(-y - z) = \phi_x(y + z) = \phi(x - y - z) = \phi_{x-y}(z)$, donc $\check{l}(y) = (v \star \check{\phi_x})(-y) =< v, \phi_{x-y} >= v \star \phi(x - y) = (v \star \phi)_x(y)$. On en déduit

$$w \star \phi(x) = (u \star (v \star \check{\phi_x}))(0) =< u, \check{l} >=< u, (v \star \phi)_x >= (u \star (v \star \phi))(x).$$

On a ainsi démontré la relation cherchée.

Remarque De la définition $w \star \phi = u \star (v \star \phi)$ on a déduit à titre de conséquence une expression de $< w, \psi >= u \star (v \star \check{\phi})(0)$, et cette expression a redonné dans tous les cas $w \star \phi = u \star (v \star \phi)$.

La même démarche peut être effectuée pour la relation $< w, \psi >=< u, \check{v} \star \psi >$, qui implique la relation $w \star \phi = u \star (v \star \phi)$.

Nous allons étudier la commutativité et l'associativité du produit de convolution. Soit $u \in \mathcal{D}'$ et $v \in \mathcal{E}'$. On veut définir $v \star u$. Pour cela, on prend $\phi \in C^\infty_0$, alors $u \star \phi$ est une fonction de classe C^∞. La distribution v est à support compact, donc il existe χ à support compact telle que, pour toute fonction C^∞, on ait $< v, l >=< v, l\chi >$. Les seules quantités à évaluer sont les dérivées de $u \star \phi$ sur le compact K support de χ. Soit K_0 tel que supp$\phi \subset K_0$. Alors on a, pour $x \in K$, $x - y \in K_1$ compact. Ainsi, en écrivant la définition de u comme distribution sur les fonctions test à support dans K_1, il existe C_1 et p_{K_1} telles que

$$| < u, \psi > | \leq C_1 \max_{|\alpha|\leq p_{K_1}} ||\psi^{(\alpha)}||.$$

On s'est alors ramené à la même démonstration que celle pour montrer que $u\star(v\star\phi)$ est une distribution. D'autre part, on calcule

$$\begin{aligned}
< u \star (v \star \phi), \psi > &= (u \star (v \star \phi)) \star \check{\psi}(0) \\
&= u \star [(v \star \phi) \star \check{\psi}](0) \text{ associativité} \\
&= u \star [\check{\psi} \star (v \star \phi)](0) \text{ commutativité pour les fonctions} \\
&= (u \star \check{\psi}) \star (v \star \phi)(0) \text{ associativité} \\
&= (v \star \phi) \star (u \star \check{\psi})(0) \text{ commutativité pour les fonctions} \\
&= (v \star (u \star \check{\psi}) \star \phi)(0) \text{ commutativité pour les fonctions et associativité} \\
&= (v \star (u \star (\check{\psi} \star \phi)))(0) \text{ associativité} \\
&= (v \star (u \star \phi)) \star \check{\psi}(0) \text{ commutativité pour les fonctions} \\
&=< v \star (u \star \phi), \psi >
\end{aligned}$$

Notons que l'on a utilisé l'associativité des distributions lorsque deux sur les trois sont à support compact (une fonction étant considérée comme une distribution). Montrons cette associativité. Soit $\tilde{w} = v \star w$ et $\tilde{u} = u \star v$ lorsque u et w sont à support compact et v est une distribution. On note, d'autre part, $\psi = w \star \phi$. Par définition du produit de convolution $\tilde{w} \star \phi = (v \star w) \star \phi = v \star \psi$. Donc, comme $\tilde{w}$ est une distribution et u est à support compact, on peut définir $u \star \tilde{w}$ et on trouve $(u \star \tilde{w}) \star \phi = u \star (\tilde{w} \star \phi) = u \star (v \star \psi) = (u \star v) \star \psi = \tilde{u} \star \psi$.

D'autre part, $(\tilde{u} \star w) \star \phi = \tilde{u} \star (w \star \phi) = \tilde{u} \star \psi$. L'égalité est démontrée.

Remarque Cette égalité ne coule pas de source: en effet $(1 \star \delta') \star H = 0 \star H = 0$ alors que $1 \star (\delta' \star H) = 1 \star \delta = 1$. Ce qui est mis en défaut est que $\psi = \phi$ est une fonction C^∞, non à support compact, ce qui entraine que l'on ne peut pas définir par associativité $(1 \star \delta') \star \psi$ (le deuxième terme est $1 \star (\delta' \star \psi)$) D'autre part, l'autre côté pose aussi problème à définir: en effet $(\delta' \star H)$ est une distribution, ϕ est une fonction test à support compact, donc $(\delta' \star H) \star \phi$ est a priori une fonction C^∞ dont le support n'est pas compact, donc on ne peut pas la convoler avec une fonction dont le support n'est pas compact (la fonction 1). Ici, le miracle se produit pour faire aboutir le calcul car $\delta' \star H = \delta$, la dérivée de H étant nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Chapter 5

Les formules de saut

Nous souhaitons, dans cette partie, généraliser et démontrer les formules utilisées en Physique qui portent le nom de formule de Stokes, formule de Green et de formule d'Ostogradski. Rappelons que la formule de Stokes indique que la circulation d'un cham vectoriel le long d'une courbe fermée est égale au flux du rotationnel du champ et que la formule d'Ostogradski (dans $\mathbb{R}^3$) indique que le flux sortant de $\vec{X}$ au travers d'une surface fermée S est égale à l'intégrale de la divergence du champ dans le volume délimité par la surface. Ces formules donnent donc une relation entre la dérivée d'une fonction dans un ouvert en fonction d'une trace de cette fonction sur le bord de l'ouvert.

5.1 Les sauts en dimension 1

Avant de traiter le cas général, plaçons nous en dimension 1. On considère une fonction f de classe C^1 par morceaux dans $[a,b]$, qui admet, en tout point où elle n'est pas continue, une limite à droite et une limite à gauche. Il existe ainsi une subdivision de $[a,b]$ en intervalles $[a,a_1[$, $]a_i,a_{i+1}[$, $]a_{i+1},b]$ telle que f soit de classe C^1 sur $]a_i,a_{i+1}[$. On note $f(a_i+)$ et $f(a_i-)$ les limites respectives à droite et à gauche. Par convention, les points intérieurs à $[a,b]$ sont $a_1,..,a_n$ et on note $a_0=a, a_{n+1}=b$. La fonction f définit une distribution, dont on calcule la dérivée, que nous notons $\frac{d}{dx}f$. Par définition, pour $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$< \frac{d}{dx}f,\phi >= - < f,\phi'(x) >= -\int_a^b f(x)\phi'(x)dx$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)\phi'(x)dx = \sum_{i=0}^{n}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\phi'(x)dx.$$

Comme $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\phi'(x)dx = \phi(a_{i+1})f(a_{i+1}-) - \phi(a_i)f(a_i+) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\phi(x)dx$, où la fonction f' est définie presque partout, on a la relation

$$\begin{aligned} -\textstyle\int_a^b f(x)\phi'(x)dx = & \textstyle\sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\phi(x)dx \\ & +\textstyle\sum_{i=0}^n f(a_i+)\phi(a_i) - f(a_{i+1}-)\phi(a_{i+1}) \end{aligned}$$

soit, en notant f' la distribution définie par f' sur chaque intervalle $]a_i,a_{i+1}[$

$$\begin{aligned}< \tfrac{d}{dx}f,\phi >= & < f',\phi > +(f(a+)-0) < \delta_a,\phi > +(0-f(b-)) < \delta_b,\phi > \\ & + \textstyle\sum_{i=1}^n (f(a_i+)-f(a_i-)) < \delta_{a_i},\phi > .\end{aligned}$$

On a ainsi démontré le théorème

Théorème 5.1 *La distribution $\frac{d}{dx}f$ est donnée, à partir de f' et des sauts de f, par*

$$\frac{d}{dx}f = f' + \sum_{i=0}^{n+1}(f(a_i+)-f(a_i-))\delta_{a_i}.$$

avec les conventions $a_0 = a, a_{n+1} = b$, $f(a_0-) = 0$, $f(a_{n+1}+) = 0$

On en déduit la proposition:

Proposition 5.1 *Soit u une fonction C^1 définie sur un intervalle $[a,b]$. On la prolonge par 0 à l'extérieur de $[a,b]$ et on note la prolongée $\underline{u}$. De même, on note $\underline{u}'$ la prolongée de la fonction u', définie par u' sur $]a,b[$ et par 0 à l'extérieur. Alors*

$$\frac{d}{dx}\underline{u} = \underline{u}' + u(a)\delta_a - u(b)\delta_b.$$

Cette proposition est le cas particulier où la fonction u est de classe C^1 par morceaux d'un résultat plus général, que j'énonce maintenant:

Proposition 5.2 *Soit $g \in C^0(I)$, telle que sa dérivée au sens des distributions g' vérifie $g' \in L^1_{loc}(I)$, $a,b \in I$.*

$$\frac{d}{dx}({}^d g 1_{[a,b]}) = g' 1_{[a,b]} + g(a)\delta_a - g(b)\delta_b.$$

Preuve On note $f(t) = g'(t)$. Alors l'équation, au sens des distributions:

$$u' =^d f$$

admet comme solutions

$$u(x) = C + \int_a^x f(t)dt. \tag{5.1.1}$$

On prouve déjà ce résultat. Pour cela, on considère $g(x) = \int_a^x f(t)dt$. Comme f est L^1_{loc}, g est bien définie. Soit x,y dans $[c,d] \subset]a,b[$. On vérifie que f est L^1 sur $[c,d]$, ainsi $\int_x^y |f(t)|dt$ tend vers 0 si $x-y$ tend vers 0. Cela assure que g est continue.

Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On vérifie que

$$< g,\phi' >= \int_a^b [\phi'(x)\int_c^x f(t)dt]dx.$$

On considère l'ouvert $\mathcal{O} = \{(t,x), c < t < x \text{ ou } x < t < c\}$. On voit que, par Fubini puisque $\phi' f$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ (on remarque que $\int_c^x f(t)dt = -\int_x^c f(t)dt$ si $x < c$ et lorsque t est compris entre c et x, on a $t > c$ si $c < x$ et $t < c$ si $c > x$, ce qui implique que le signe de $x-c$ et le signe de $t-c$ sont identiques)

$$< g,\phi' >= \int_{\mathcal{O}} \phi'(x)\text{sign}(t-c)f(t)dxdt.$$

On intègre uniquement sur x. On trouve

$$\int_{c<t<x} \phi'(x)dx = -\phi(t), \int_{x<t<c} \phi'(x)dx = \phi(t).$$

Ainsi on résume en

$$\int_{\{c<t<x\}\cup\{x<t<c\}} \phi'(x)dx = -\text{sign}(t-c)\phi(t).$$

Il vient alors tout de suite

$$< g, \phi' >= - < f, \phi > .$$

Le résultat est démontré.

On considère alors

$$< \frac{d}{dx}(g1_{[a,b]}), \phi >= -\int_a^b g(x)\phi'(x)dx = -\int_a^b g(a)\phi'(x)dx - \int_a^b \int_a^x f(t)\phi'(x)dxdt$$

(on a appliqué la formule de Fubini dans le second membre). D'autre part

$$\begin{aligned} \textstyle\int_a^b \int_a^x f(t)\phi'(x)dxdt &= \textstyle\int_{a\leq t\leq x\leq b} f(t)\phi'(x)dxdt \\ &= \textstyle\int_a^b dt[\int_t^b dx\phi'(x)]f(t) \\ &= \textstyle\int_a^b [\phi(b) - \phi(t)]f(t)dt. \end{aligned}$$

Ainsi il reste

$$< \frac{d}{dx}(g1_{[a,b]}), \phi >= -g(a)[\phi(b) - \phi(a)] + \int_a^b f(t)\phi(t)dt - (\int_a^b f(t)dt)\phi(b)$$

et il suffit de remarquer que $\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$ pour obtenir le résultat.

De même, ce résultat s'étend aux dérivées successives, comme pour la dérivée seconde, en considérant le saut de f et de la dérivée de f

$$\frac{d^2}{dx^2} f = f" + \sum (f(a_i+) - f(a_i-))\delta'_{a_i} + \sum (f'(a_i+) - f'(a_i-))\delta_{a_i}.$$

Nous avons ainsi trouvé la dérivée d'une prolongée par 0 en dimension 1. Lorsque nous voulons étendre ce résultat aux dimensions supérieures, il est bon de passer par la formule de Stokes, ou la formule d'intégrations par parties dans le cas général. Pour le moment, donnons en une application élémentaire:

5.2 La solution élémentaire du Laplacien

Nous démontrons dans cette section que la solution élémentaire du Laplacien (distribution V telle que $\Delta V = \delta_0$ en dimension n pour $n \geq 3$) est $\frac{C_n}{r^{n-2}}$, où $C_n = -\frac{1}{(n-2)S_{n-1}}$, S_{n-1} est la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, et est égale à $\frac{1}{2\pi}\log r$ en dimension 2.

Pour cela, on remarque que le Laplacien en coordonnées sphériques pour une fonction radiale est égal à

$$\Delta f = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{df}{dr}.$$

Ainsi, pour $n = 2$, on vérifie, que, hors de 0, $\frac{d \log r}{dr} = \frac{1}{r}$, $\frac{d^2}{dr^2}(\log r) = -\frac{1}{r^2}$, et, pour $n \geq 2$, $\frac{d}{dr}(\frac{1}{r^{n-2}}) = -\frac{n-2}{r^{n-1}}$, $\frac{d^2}{dr^2}(\frac{1}{r^{n-2}}) = +\frac{(n-1)(n-2)}{r^n}$, ainsi l'équation est vérifiée pour $n \geq 2$ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. La fonction $\frac{1}{r^{n-2}}$ est localement sommable (dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$), donc définit une distribution, d'ordre 0, car $r^{n-1}r^{-n+2}$ est intégrable au voisinage de 0.

On définit, pour $n \geq 3$, la distribution fonction ρ_ε (cette notation est de Laurent Schwartz) égale à $\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}$ pour $0 \leq r \leq \varepsilon$, et égale à r^{-n+2} pour $r \geq \varepsilon$. Ainsi, la formule des sauts nous permet de dire que cette distribution est continue, et $\frac{d\rho_\varepsilon}{dr} = -(n-2)r^{-n+1}$ pour $r > \varepsilon$ et est nulle pour $r < \varepsilon$. On applique la formule des sauts, pour obtenir (utilisant la nullité de $\Delta\frac{1}{r^{n-2}}$ pour $r \neq 0$)

$$\frac{d^2\rho_\varepsilon}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{d\rho_\varepsilon}{dr} = -(n-2)\varepsilon^{-n+1}\delta_{r=\varepsilon}.$$

On a alors

$$< \Delta\rho_\varepsilon, \phi > = < \rho_\varepsilon, \Delta\phi > = \int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon \Delta\phi dx.$$

Utilisant là aussi les coordonnées sphériques, on trouve

$$\begin{aligned} < \Delta\rho_\varepsilon, \phi > &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \rho_\varepsilon \Delta\phi(r,\Omega) r^{n-1} dr d\sigma \\ &= < \rho_\varepsilon, r^{n-1}(\tfrac{d^2}{dr^2} + \tfrac{n-1}{r}\tfrac{d}{dr})(\textstyle\int_{S^{n-1}} \phi(r,\Omega)d\sigma) > \\ &= < \Delta\rho_\varepsilon, \textstyle\int_{S^{n-1}} \phi(r,\Omega)d\sigma > . \end{aligned}$$

La relation démontrée sur $\Delta\rho_\varepsilon$ entraine que

$$\begin{aligned} < \Delta\rho_\varepsilon, \phi > &= < \Delta\rho_\varepsilon, r^{n-1} \textstyle\int_{S^{n-1}} \phi(r,\Omega)d\sigma > \\ &= -(n-2)\varepsilon^{-n+1}\varepsilon^{n-1} \textstyle\int_{S^{n-1}} \phi(\varepsilon,\Omega)d\sigma. \end{aligned}$$

Par le théorème de la convergence dominée, on vérifie que la dernière intégrale tend vers $\phi(0)\int_{S^{n-1}} d\sigma = S_{n-1}\phi(0)$.

Nous avons donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0, \mathcal{D}'} \Delta\rho_\varepsilon = -(n-2)S_{n-1}\delta_0$$

ainsi

$$\Delta(-\frac{1}{(n-2)S_{n-1}r^{n-2}}) = \delta_0.$$

Le cas de $n = 2$ se traite en considérant, de même, la fonction ρ_ε égale à $\log r$ pour $r \geq \varepsilon$ et à $\log \varepsilon$ pour $0 \leq r \leq \varepsilon$. Ainsi

$$\frac{d}{dr}(r\frac{d\rho_\varepsilon}{dr}) = (1-0)\delta_{r=\varepsilon}$$

ce qui permet d'écrire

$$< \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{d\rho_\varepsilon}{dr}), \phi > = \int_0^{2\pi} \varepsilon \times \frac{1}{\varepsilon}\phi(\varepsilon\theta)d\theta.$$

On a ainsi $\Delta(\frac{1}{2\pi}\log r) = \delta_0$.

5.3 La dimension $n > 1$ dans le cas d'un demi-espace

On se donne donc une fonction $u(x', x_n)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, et on souhaite calculer la dérivée de la distribution définie par U qui vaut u sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ et 0 sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_-$. On trouve ainsi

$$< \partial_{x_j} U, \phi >= - \int_{\mathbf{R}^{n-1}} dx' \int_0^\infty u(x', x_n) \partial_{x_j} \phi(x', x_n) dx_n$$

pour $1 \leq j \leq n$. Lorsque $j \neq n$, on contrôle que

$$\int_0^\infty u(x', x_n) \partial_{x_j} \phi(x) dx_n = \partial_{x_j} [\int_0^{+\infty} u(x', x_n) \phi(x', x_n) dx_n] - \int_0^{+\infty} \partial_{x_j} u(x', x_n) \phi(x) dx_n$$

L'intégration du premier terme sur $\mathbb{R}$ dans la variable x_j donne 0, ainsi on trouve, pour $j \neq n$

$$< \partial_{x_j} U, \phi >=< 1_{x_n \geq 0} \partial_{x_j} u, \phi >$$

où on a noté par commodité $1_{x_n \geq 0} \partial_{x_j} u$ la distribution prolongeant $\partial_{x_j} u$, définie sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$, à $\mathbb{R}^n$ par 0 sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_-$. Cette distribution est définie par l'action de la fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, égale à $\partial_{x_j} u$ sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$ et à 0 sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_-^*$, sur la fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ égale à $1_{x_n \geq 0} \phi(x', x_n)$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Lorsque $j = n$, on trouve

$$\begin{aligned} < \partial_{x_n} U, \phi > &= - \textstyle\int_{\mathbf{R}^{n-1}} dx' \int_0^\infty u(x', x_n) \partial_{x_n} \phi(x', x_n) dx_n \\ &= \textstyle\int_{\mathbf{R}^{n-1}} u(x', 0) \phi(x', 0) dx' + \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+} \partial_{x_n} u(x) \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient le résultat:

Proposition 5.3 *Soit u définie comme ci-dessus. Ses dérivées sont données par*

$$j \neq n, \partial_{x_j} U = 1_{x_n \geq 0} \partial_{x_j} u$$

$$\partial_{x_n} U = 1_{x_n \geq 0} \partial_{x_n} u + u(x', 0) \delta_{x_n = 0}.$$

La distribution $u(x', 0)\delta_{x_n=0}$ s'appelle distribution de couche, est égale au produit tensoriel de $x' \to u(x', 0)$ et de la distribution de Dirac en $x_n = 0$. C'est une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, donnée par

$$< u(x', 0)\delta_{x_n=0}, \phi >= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} u(x', 0) \phi(x', 0) dx'.$$

Le but de la section suivante est de généraliser ce résultat.

5.4 Les formules de dérivation de distributions dans le cas d'ouverts de $\mathbb{R}^n$

On se contentera dans un premier temps de l'ouvert Ω appelé un surgraphe, c'est-à-dire défini par une représentation locale $x_n > \Phi(x')$, la fonction Φ étant de classe C^2.

Si u est une fonction de classe C^1 sur Ω, alors, définissant Ψ:

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x', x_n) & \rightarrow & (x', x_n - \Phi(x')) \end{array}$$

on constate que $u \circ \Psi^{-1}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^*_+$. On peut donc calculer $\partial_{x_j}(u \circ \Psi^{-1})$ en utilisant la section précédente.

On constate que

$$\partial_{x_j}(u \circ \Psi^{-1}) = \sum_k (\partial_{x_k} u \circ \Psi^{-1}).\partial_{x_j}((\Psi^{-1})_k).$$

Il est clair de voir que $\Psi^{-1}(x', y_n) = (x', y_n + \Phi(x'))$, ainsi

$$\begin{aligned} \partial_{x_j}(u \circ \Psi^{-1})(x', y_n) &= \partial_{x_j} u \circ \Psi^{-1} + \partial_{x_n} u \circ \Psi^{-1} \partial_{x_j} \Phi \\ \partial_{y_n}(u \circ \Psi^{-1})(x', y_n) &= \partial_{x_n} u \circ \Psi^{-1} \end{aligned}$$

Nous avons l'égalité, en intégrant en x_j

$$0 = \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^*_+} \partial_{x_j}(u \circ \Psi^{-1})(x', y_n) dy_n dx'$$

ce qui donne

$$0 = \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^*_+} (\partial_{x_j} u) \circ \Psi^{-1}(x', y_n) dx' dy_n + \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^*_+} (\partial_{x_n} u) \circ \Psi^{-1}(x', y_n) \partial_{x_j} \Phi(x') dx' dy_n.$$

Utilisant alors le changement de variable inverse, de jacobien 1, ainsi que la remarque $(\partial_{x_n} u) \circ \Psi^{-1} = \partial_{y_n}(u \circ \Psi^{-1})$, il reste, en intégrant $\int_0^\infty \partial_{y_n}(u \circ \Psi^{-1})(x', y_n) \Phi(x') dy_n$

$$0 = \int_\Omega \partial_{x_j} u(x', x_n) dx' dx_n - \int_{\mathbf{R}^{n-1}} u(x', \Phi(x')) \partial_{x_j} \Phi(x') dx'.$$

De même

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^*_+} \partial_{y_n}(u \circ \Psi^{-1})(x', y_n) dy_n dx' = - \int_{\mathbf{R}^{n-1}} u(x', \Phi(x')) dx'.$$

On considère alors un champ de vecteurs $X = (X_1, ...X_n)$ dans les coordonnées (x', x_n). Alors

$$\int_\Omega \partial_{x_j} X_j(x', x_n) dx' dx_n = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} X_j(x', \Phi(x')) \partial_{x_j} \Phi(x') dx'.$$

De même,

$$\int_\Omega \partial_{x_n} X_n(x', x_n) dx' dx_n = - \int_{\mathbf{R}^{n-1}} X_n(x', \Phi(x')) dx'$$

Ce qui peut être intrinsèque est le vecteur normal unitaire. De même, ce qui est intrinsèque est la divergence d'un champ de vecteurs. Comme le bord est $x_n = \Phi(x')$, ce vecteur normal unitaire est (au signe près)

$$\pm \vec{n}(x') = \frac{1}{(1 + |\nabla \Phi|^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \Phi \\ .. \\ \partial_{x_{n-1}} \Phi \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Comment savoir quel est le bon signe pour trouver le vecteur sortant? Par définition, si la variété est régulière, pour un point $(x'_0, \Phi(x'_0))$ du bord, il existe ε_0 tel que, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $(x'_0, \Phi(x'_0)) + \varepsilon\vec{n} \notin \Omega$ et pour $-\varepsilon_0 < \varepsilon < 0$ on a $(x'_0, \Phi(x'_0)) + \varepsilon\vec{n} \notin \Omega$. On considère alors le vecteur $\frac{1}{(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix} \partial_{x_1}\Phi \\ .. \\ \partial_{x_{n-1}}\Phi \\ -1 \end{pmatrix}$. On calcule $\Phi(x'_0 + \frac{\varepsilon}{(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}}\nabla\Phi(x'_0)) - \Phi(x'_0) + \frac{\varepsilon}{(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}}$. Après développement limité en ε, on trouve $\varepsilon(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^2)$. Supposant la fonction Φ de classe C^2, ce terme en ε^2 est borné par $\varepsilon^2 M$ pour $\varepsilon < 1$. Ainsi, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{1}{2M}\max(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}$, on trouve

$$\Phi(x'_0 + \frac{\varepsilon}{(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}}\nabla\Phi(x'_0)) - \Phi(x'_0) + \frac{\varepsilon}{(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}} > 0.$$

Ainsi le point

$$(x'_0, \Phi(x'_0)) + \varepsilon\frac{1}{(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix} \partial_{x_1}\Phi \\ .. \\ \partial_{x_{n-1}}\Phi \\ -1 \end{pmatrix}$$

vérifie $\Phi(x') - x_n > 0$, donc est dans le complémentaire de Ω. Le vecteur normal unitaire sortant est $\vec{n}(x') = \frac{1}{(1+|\nabla\Phi|^2)^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix} \partial_{x_1}\Phi \\ .. \\ \partial_{x_{n-1}}\Phi \\ -1 \end{pmatrix}$. On a les égalités

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\sum_j \partial_{x_j} X_j) dx' dx_n &= \sum_{j=1}^{j=n-1} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} X_j(x', \Phi(x'))\partial_{x_j}\Phi(x')dx' - \int_{\mathbf{R}^{n-1}} X_n(x', \Phi(x'))dx'. \\ &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} (X(x', \Phi(x')).\vec{n}(x'))(1+|\nabla\Phi(x')|^2)^{\frac{1}{2}} dx'. \end{aligned}$$

Ceci permet de trouver (ou de retrouver) la mesure de surface sur $\partial\Omega$, qui est alors $d\sigma(x') = (1+|\nabla\Phi(x')|^2)^{\frac{1}{2}}dx$ pour écrire convenablement la relation (formule d'Ostogradski dans le cas de la dimension $d = 3$):

Théorème 5.2 *On suppose que X est un champ de vecteurs à support compact dans $\Omega = \{x_n \geq \Phi(x')\}$ dont les composantes sont de classe C^1. Alors on a*

$$\int_\Omega div\, X dx = \int_{\partial\Omega} (X(x', \Phi(x')).\vec{n}(x'))d\sigma(x')$$

où $\vec{n}(x')$ est la normale unitaire sortante à Ω.

On obtient aussi la formule dite formule de Stokes:

Proposition 5.4

$$\int_S (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_{\partial S} (Pe_x + Qe_y).(\tau_x, \tau_y)ds$$

où s est l'abscisse curviligne sur ∂S et (τ_x, τ_y) est le vecteur tangent unitaire associé à l'abscisse curviligne ($\frac{dM}{dx}$ pour $M \in \partial S$).

Cette égalité est une conséquence des deux égalités $\int_S \partial_x Q dxdy = \int_{\partial S} Qn_x dl$ et $\int_S \partial_y P dxdy = \int_{\partial S} Pn_y dl$ et de la remarque $(-n_y, n_x) = (\tau_x, \tau_y)ds$.

La formule d'intégration par parties généralisée et la formule de Green usuelle, s'en déduisent:

Proposition 5.5

$$\int_\Omega g(x)\partial_{x_i} f(x)dx = \int_{\partial\Omega} fg(\vec{n}.e_i)d\sigma - \int_\Omega \partial_{x_i} g(x)f(x)dx.$$

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} (u(\nabla v.\vec{n}) - v(\nabla u.\vec{n}))d\sigma.$$

La preuve est une conséquence du théorème 5.2. Il suffit de considérer, pour la première égalité, $X_j = fg\delta_{ij}$, pour avoir $X = fge_i$ et donc $\text{div } X = \partial_{x_i}(fg) = f\partial_{x_j} g + g\partial_{x_j} f$, $X.\vec{n} = fg\vec{n}.e_i$.

Pour la deuxième formule, on considère $X = u(x)\nabla v(x)$. Il vient $\text{div } (u(x)\nabla v(x)) = \sum_j \partial_{x_j}(u(x)\partial_{x_j} v(x) = [u\Delta v + \nabla u\nabla v]$. Echangeant les rôles de u et de v, $\text{div } (v(x)\nabla u(x))dx = [v\Delta u + \nabla u\nabla v]$. Utilisant le théorème 5.2, il vient

$$\int_\Omega \text{div } (v(x)\nabla u(x))dx = \int_{\partial\Omega} v(\nabla u.\vec{n})d\sigma,$$
$$\int_\Omega \text{div } (u(x)\nabla v(x))dx = \int_{\partial\Omega} u(\nabla v.\vec{n})d\sigma.$$

Retranchant les deux égalités obtenues, on voit que $\int_\Omega \nabla u\nabla v dx$ s'éliminent et on a le résultat.

On termine par la formule des sauts dans l'espace:

Proposition 5.6 *On suppose $\partial\Omega$ régulier et orienté, et on considère $\vec{n}$ étant la normale extérieure à Ω. Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}^n = \Omega \cup \Omega' \cup \partial\Omega$, telle que ses restrictions à chacun des ouverts se prolonge à une fonction de classe C^1 sur l'adhérence. Cette fonction admet une limite pour $x' \in \partial\Omega$ dans Ω, notée $f(+)(x')$ ($f_+(x') = \lim_{x\in\Omega, x\to x'} f(x)$) et dans Ω', notée $f(-)(x')$. On note de plus $\underline{f}$ désignant la distribution coincidant avec chaque fonction sur Ω et sur Ω'. On a*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\underline{f} = \underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} + [f(-) - f(+)]\vec{n}.e_i d\sigma.$$

Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On applique la première égalité de la proposition 5.5à f et ϕ dans Ω pour obtenir

$$\int_\Omega f\partial_{x_i}\phi dx = -\int_\Omega \partial_{x_i} f\phi dx + \int_{\partial\Omega} f(+)\phi\vec{n}.e_i d\sigma.$$

De même

$$\int_{\Omega'} f\partial_{x_i}\phi dx = -\int_{\Omega'} \partial_{x_i} f\phi dx + \int_{\partial\Omega} f(-)\phi(-\vec{n}.e_i)\phi d\sigma,$$

car la normale extérieure à Ω' est l'opposée de la normale extérieure à Ω. ASachant que

$$< \partial_{x_i} f, \phi >= -\int_{\mathbf{R}^n} f \partial_{x_i} \phi dx = -\int_{\Omega} f \partial_{x_i} \phi dx - \int_{\Omega'} f \partial_{x_i} \phi dx$$

par définition de la dérivée au sens des distributions, on a le résultat de la proposition 5.6.

Chapter 6

La transformation de Fourier.

6.0 Introduction

On recherche dans un premier temps les fonctions $f(x)$, réelles ou complexes de la variable réelle x, telles que, si $P(X)$ est un polynôme à coefficients constants, alors f est vecteur propre de l'opérateur[1] de C^∞ dans lui même:

$$g \to P(\frac{\partial}{\partial x})(g)(x).$$

Ceci veut dire qu'il existe un λ tel que $P(\frac{\partial}{\partial x})(f) = \lambda f$. Si P est un polynôme de degré 1, l'équation s'écrit ($a_1 \neq 0$)

$$a_1 f'(x) + a_0 f(x) = \lambda f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

dont la solution est $a_1 \neq 0$, $f(x) = f(0)e^{-\frac{a_0-\lambda}{a_1}x}$.

On veut, de plus, que cette fonction reste bornée sur $\mathbb{R}$ (il s'agit d'une condition très forte). On déduit que $\frac{a_0-\lambda}{a_1} = i\xi, \xi \in \mathbb{R}$. On vérifie alors que $f(x) = f(0)e^{ix\xi}$. Généralisant à tout polynôme P:

$$P(\frac{\partial}{\partial x})[e^{ix\xi}] = P(i\xi)e^{ix\xi}.$$

Ce résultat se généralise aussi à des polynômes avec plusieurs variables sur $\mathbb{R}^d$, où la fonction propre considérée est

$$e^{i\sum_{j=1}^{j=d} x_j\xi_j}$$

notée encore $e^{ix.\xi}$. On note alors f_x et f_ξ les fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ (respectivement $\mathbb{R}^d_\xi$ et $\mathbb{R}^d_x$) définies par

$$f_x(\xi) = e^{ix.\xi}, f_\xi(x) = e^{ix.\xi}.$$

Ce sont des fonctions oscillantes. Considérons plus particulièrement f_ξ. C'est une fonction multipériodique, pour $\xi \neq 0$, de période $\frac{2\pi}{\xi_j}$ dans la variable x_j. Elle apparait comme l'objet naturel à introduire lorsque l'on étudie des opérateurs à coefficients constants.

[1] auquel on associe l'opérateur noté $P(\frac{\partial}{\partial x})$ par $P(X) = \sum_{j=0}^{j=N} a_j X^j$, alors $P(\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{j=0}^{j=N} a_j \frac{\partial^j}{\partial x_j}$.

Utilisation de la transformation de Fourier pour résoudre des équations aux dérivées partielles Dans cette introduction, nous faisons comme dans l'introduction générale aux distributions où nous avions considéré l'équation des ondes: nous considérons les deux équations aux dérivées partielles de la Physique:

- l'équation des ondes $\partial^2_{t^2} u = \Delta u$, que nous allons étudier sous un autre angle
- l'équation de la chaleur $\partial_t u = \Delta u$.

On recherche une solution de l'équation des ondes sous la forme $c(t) f_\xi$, on vérifie que la fonction $c(t)$ est solution de l'équation différentielle (notant de manière usuelle $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^{j=d} \xi_j^2$ et supposant $\xi \neq 0$)

$$c''(t) e^{ix.\xi} = -|\xi|^2 c(t) e^{ix.\xi}, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Introduisons la fonction sinus cardinal, notée $\sin_c u = \frac{\sin u}{u}$ pour $u \neq 0$ et $\sin_c 0 = 1$. La solution générale de l'équation $c"(t) = -|\xi|^2 c(t)$ est, pour $|\xi| \neq 0$

$$c(t) = c(0) \frac{e^{i|\xi|t} + e^{-i|\xi|t}}{2} + \frac{c'(0)}{i|\xi|} \frac{e^{i|\xi|t} - e^{-i|\xi|t}}{2} = c(0) \cos(|\xi| t) + c'(0) t \sin_c(|\xi| t).$$

C'est une fonction périodique en t de période $\frac{2\pi}{|\xi|}$. Une solution de l'équation de la chaleur de la forme $c(t) e^{ix.\xi}$ vérifie l'égalité $c'(t) e^{ix.\xi} = -|\xi|^2 c(t) e^{ix.\xi}$, ce qui donne

$$c(t) = c(0) e^{-|\xi|^2 t}.$$

La solution générale $u(x,t)$ de l'équation des ondes dont la donnée initiale est $u(x,0) = c(0) e^{ix.\xi}$ et la dérivée $\partial_t u(x,0) = c'(0) e^{ix.\xi}$ est la fonction

$$u(x,t) = c(0) \frac{e^{i|\xi|t + ix.\xi} + e^{-i|\xi|t + ix.\xi}}{2} + \frac{c'(0)}{i|\xi|} \frac{e^{i|\xi|t + ix.\xi} - e^{-i|\xi|t + ix.\xi}}{2}$$

La solution générale $v(x,t)$ de l'équation de la chaleur dont la donnée initiale est $c(0) e^{ix.\xi}$ est

$$v(x,t) = c(0) e^{ix.\xi - |\xi|^2 t}.$$

On a ainsi identifié des solutions de ces deux équations à l'aide de la fonction f_x.

Transformation de Fourier et séries de Fourier Il faudrait pouvoir "construire" toute fonction à l'aide de ces fonctions exponentielles. On sait, par théorie de Fourier classique, que lorsque f, définie sur $\mathbb{R}$, est continue et périodique de période T, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx \frac{2\pi}{T}} \tag{6.0.1}$$

avec $a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-int \frac{2\pi}{T}} dt$.

Lorsque f est quelconque, on ne peut pas la représenter comme une série de Fourier en général; il faut qu'elle soit périodique. On cherche ainsi une représentation de type intégral. C'est ce que nous allons faire heuristiquement. Les fonctions intervenant dans la somme (6.0.1) précédente sont les exponentielles discrètes. On vérifie que

$$e^{inx\frac{2\pi}{T}} =< \delta_{\xi=\frac{2\pi n}{T}}, f_x > .$$

Dans le cas d'une fonction périodique, on a alors

$$f(x) =< \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta_{\xi=\frac{2\pi n}{T}}, f_x > .$$

Il serait agréable d'écrire

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta_{\xi=\frac{2\pi n}{T}},$$

qui est une distribution, ce qui donnerait la relation simple

$$f(x) =< \mathcal{F}(f), f_x > .$$

Remarquons que $\mathcal{F}(f)$ est ici une distribution d'ordre 0. Son action sur une fonction test ϕ de classe $C_0^\infty(\mathbb{R}_\xi)$ donne

$$< \mathcal{F}(f), \phi >= \sum_{n\in\mathbb{Z}, \frac{2\pi n}{T}\in \quad \mathrm{supp}\phi} a_n\phi(\frac{2\pi n}{T})$$

qui est une somme finie. On obtient alors, en notant encore que la somme est finie

$$< \mathcal{F}(f), \phi >= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)(\sum_n \phi(\frac{2\pi n}{T})e^{-int\frac{2\pi}{T}})dt.$$

On a l'égalité

$$\int_{-a}^{a} e^{-ix\xi+inx\frac{2\pi}{T}}dx = \begin{cases} 2a, \text{ si } \xi = \frac{2\pi}{T}n \\ \frac{e^{-ia\xi+ina\frac{2\pi}{T}}-e^{ia\xi-ina\frac{2\pi}{T}}}{i(-\xi+\frac{2\pi n}{T})} \quad \text{sinon.} \end{cases} = 2a\sin_c(a(\xi-n\frac{2\pi}{T})).$$

On reconnait alors une approximation C^∞ de l'identité (qui n'est pas à support compact). On peut calculer la limite au sens des distributions. Pour toute fonction ϕ C^∞ à support compact, inclus dans $[-K, K]$:

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A}\sin_c u\phi(\tfrac{\varepsilon u}{2})du &= \int_{-A/2}^{A/2}\sin_c 2v\phi(\varepsilon v)dv \\ &= 2\int_{-A/2}^{A/2}\tfrac{\sin v\phi(\varepsilon v)}{v}(\sin' v)dv \\ &= 2[\tfrac{\sin^2 v\phi(\varepsilon v)}{v}]_{-A/2}^{A/2} - 2\int_{-A/2}^{A/2}(\tfrac{\sin v\phi(\varepsilon v)}{v})'(\sin v)dv \\ &= 2[\tfrac{\sin^2 v\phi(\varepsilon v)}{v}]_{-A/2}^{A/2} - 2\int_{-A/2}^{A/2}(\tfrac{\cos v\phi(\varepsilon v)}{v})(\sin v)dv \\ &\quad -2\varepsilon\int_{-A/2}^{A/2}(\tfrac{\sin^2 v\phi'(\varepsilon v)}{v})dv + 2\int_{-A/2}^{A/2}\tfrac{\sin^2 v\phi(\varepsilon v)}{v^2}dv.\end{aligned}$$

Ainsi on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}}\sin_c u\phi(\frac{\varepsilon u}{2})du = \int_{-A/2}^{A/2}\frac{\sin^2 v\phi(\varepsilon v)}{v^2}dv - \varepsilon\int_{-K}^{K}(\frac{\sin^2\frac{u}{\varepsilon}\phi'(u)}{u})du, \tag{6.0.2}$$

puisque le support de ϕ est compris dans $[-K, K]$. En introduisant les fonctions, toutes les deux C_0^∞, données par $\frac{1}{2}(\phi'(u) + \phi'(-u))$ et $\frac{1}{2}(\phi'(u) - \phi'(-u)) = \frac{1}{2}u \int_0^1 (\phi''(tu) + \phi''(-tu))dt = u\psi(u)$ on a:

$$\int_{-K}^{K} (\frac{\sin^2 \frac{u}{\varepsilon} \phi'(u)}{u})du = \int_{-K}^{K} \sin^2 \frac{u}{\varepsilon} \psi(u)du.$$

Le second terme de (6.0.2) est majoré par $\varepsilon||\phi''||_\infty$. Par le théorème de la convergence dominée, le premier terme de (6.0.2) tend vers $\phi(0)\int_{\mathbf{R}} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \phi(0)\int_{\mathbf{R}} \sin_c u du = \pi\phi(0)$. On obtient l'égalité

$$\int_{\mathbf{R}} 2a \sin_c(a(\xi - n\frac{2\pi}{T}))\phi_0(\xi)d\xi = 2\int_{\mathbf{R}} \sin_c u\phi_0(n\frac{2\pi}{T} + \frac{u}{a})du$$

et en notant $\phi(v) = \phi_0(n\frac{2\pi}{T} + v)$ et $a = \frac{2}{\varepsilon}$, on en déduit que

$$\int_{-a}^{a} e^{-ix\xi + inx\frac{2\pi}{T}} dx \to_{\mathcal{D}'(\mathbf{R})} 2\pi\delta_{\xi = \frac{2\pi}{n}}.$$

On a donc obtenu formellement, pour des fonctions périodiques, par unicité de la limite d'une suite de distributions

$$\int_{-a}^{a} e^{-ix\xi} f(x)dx \to \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Nous explicitons rigoureusement ces idées dans ce qui suit. Nous reviendrons dans la section 8 sur cette analogie, en étudiant les distributions périodiques.

6.1 La transformation de Fourier et ses propriétés élémentaires

La définition que nous prenons est celle pour les fonctions intégrables:

Définition 6.1 *La transformation de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ est la fonction, définie pour $\xi \in \mathbb{R}$, par*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-it\xi} f(t)dt.$$

Proposition 6.1 *Cettte fonction est définie pour tout ξ, est dans $L^\infty(\mathbb{R})$, est continue en ξ et tend vers 0 lorsque $|\xi|$ tend vers $+\infty$.*

Preuve La fonction $ff_{-\xi}$ est intégrable car majorée pp par une fonction intégrable. De plus

$$|\hat{f}(\xi)| \leq ||f||_{L^1(\mathbf{R})}. \tag{6.1.3}$$

On note aussi la transformée de Fourier par $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$. Par application du théorème de continuité sous le signe intégrale, comme $\xi \to f(t)e^{-it\xi}$ est continue et majorée par $|f(t)|$, qui est une fonction de L^1, on a la continuité de $\hat{f}$.

Pour démontrer la décroissance à l'infini, on utilise le fait qu'il existe une suite de fonctions C^∞ à support compact qui converge vers f. Ce résultat est une conséquence de la proposition 4.4.

D'autre part, on sait que, si ϕ est à support compact, sa transformée de Fourier vérifie

$$\xi\hat{\phi}(\xi) = \int_K \xi e^{-it\xi}\phi(t)dt = i\int_K \frac{d}{dt}(e^{-it\xi})\phi(t)dt = -i\int_K e^{-it\xi}\phi'(t)dt$$

donc $|\xi||\hat{\phi}| \leq ||\phi'||_{L^1}$, ce qui implique la convergence vers l'infini.

On écrit alors, pour $f \in L^1$,

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &\leq ||\hat{f} - \hat{\phi}_j||_\infty + |\hat{\phi}_j(\xi)| \\ &\leq ||f - \phi_j||_{L^1} + |\hat{\phi}_j(\xi)| \end{aligned}$$

On suppose que la suite ϕ_j converge vers f dans L^1 (c'est un résultat un peu différent de celui de la proposition 4.4 mais qui s'appuie sur la même troncature et régularisation). Ainsi pour tout ε il existe j_0 tel que $||f - \phi_{j_0}||_{L^1} \leq \varepsilon$. Il suffit alors de fixer j_0 dans l'egalité et de vérifier que pour $|\xi| \geq A$, $|\phi_{j_0}(\xi)| \leq \varepsilon$ pour obtenir le résultat de convergence.

On a la proposition:

Proposition 6.2 • *On suppose f dérivable sur $\mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\partial_x f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\mathcal{F}(\partial_x f)(\xi) = i\xi\mathcal{F}(f)(\xi).$$

- *On suppose $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $xf : x \to xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f}(\xi)$ est dérivable et*

$$\mathcal{F}(xf)(\xi) = i\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{f}(\xi).$$

- *On suppose $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\mathcal{F}(f \star g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi).\mathcal{F}(g)(\xi).$$

Preuve Pour le premier item, on suppose $\partial_x f \in L^1(\mathbb{R})$. On a ainsi

$$\int_{-a}^{a} \partial_x f(x)e^{-ix\xi}dx = \int_{-a}^{a} \partial_x(f(x)e^{-ix\xi})dx + i\xi\int_{-a}^{a} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

Il reste ainsi

$$\int_{-a}^{a} \partial_x f(x)e^{-ix\xi}dx = i\xi\int_{-a}^{a} f(x)e^{-ix\xi}dx + f(a)e^{-ia\xi} - f(-a)e^{ia\xi}.$$

Comme $\partial_x f$ est intégrable, f admet une limite en $+\infty$ et en $-\infty$, définies grâce à $\int_a^x \partial_x f(t)dt = f(x) - f(a)$ et la limite du membre de gauche existe lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

La fonction f admet une limite en l'infini et est intégrable, donc cette limite est nulle. En reprenant l'égalité ci-dessus et en faisant tendre a vers $+\infty$, le membre de gauche tend vers $\mathcal{F}(\partial_x f)(\xi)$ et le membre de droite tend vers $i\xi\mathcal{F}(f)$. On a le résultat. Le majorant naturel de $\xi\hat{f}(\xi)$ est alors $||f'||_{L^1}$.

Pour le deuxième item, on applique le théorème de dérivation sous le signe somme pour les fonctions intégrables à $f(x)e^{-ix\xi}dx$. On trouve alors, en utilisant que xf est dans L^1, que la limite lorsque $a \to +\infty$ et $b \to -\infty$ de la dérivée de $\int_a^b f(x)e^{-ix\xi}dx$ est la transformée de Fourier de $-ixf$. On multiplie alors par i et on échange la dérivation et la limite en a, b.

Pour le troisième item, on vérifie que $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$. On a même $(u, v) \to f(u)g(v)$ qui est une fonction de $L^1(\mathbb{R}^2)$, donc en appliquant le théorème de Fubini, on trouve que ($u = x - y$ dans la troisième ligne)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f \star g)(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}(f \star g)(x)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}(\int_{\mathbf{R}} f(y)g(x-y)dy)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} g(u)f(y)e^{-i(y+u)}dydu \\ &= (\int_{\mathbf{R}} f(y)e^{-iy\xi}dy)(\int_{\mathbf{R}} g(u)e^{-iu\xi}du)\end{aligned}$$

Le résultat en découle.

On cherche à construire un espace de fonctions, plus vaste que C_0^∞, de fonctions C^∞, qui soit invariant par transformée de Fourier.

Notons d'abord que si ϕ est dans C_0^∞, alors $\hat{\phi}$ est de classe C^∞ (dérivation sous le signe intégrale pour une intégrale dont toutes les dérivées de l'intégrand $x^\alpha \phi$ sont bornées car le support est compact). De plus, $\xi^\alpha \hat{\phi} = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(\phi^{(\alpha)})$, donc cette quantité est uniformément borné pour $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Pour contenir toutes les transformées de Fourier de fonctions de C_0^∞, cet espace doit contenir les fonctions C^∞ qui décroissent plus vite que tout polynôme.

On souhaite que cet espace contienne C_0^∞ et soit contenu dans C^∞. Donc $\hat{f}$ doit être de classe C^∞ pour f dans cet espace. Rappelons que lorsqu'on voulait que $\hat{f}$ soit dérivable, on imposait que f et xf soient dans L^1. Si on veut $\hat{f}$ de classe C^∞, une condition suffisante simple (s'appuyant sur ce qui précède) est donnée par $x^n f$ dans L^1 pour tout n. D'autre part, lorsque f est dans cet espace, elle est dans L^1 et sa transformée de Fourier est bornée. Comme $\xi^n \hat{f} = (i)^{-n}\mathcal{F}(f^{(n)})$, et que $f^{(n)}$ est dans l'espace que l'on construit, la transformée de Fourier est bornée et donc $\xi^n \hat{f}(\xi)$ est bornée. On aboutit à

Définition 6.2 *Un espace naturel invariant par transformation de Fourier, contenu dans C^∞, est l'espace de Schwartz, et est noté $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Il est donné par*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \forall a \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, ||(1 + ||x||)^a \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x)||_\infty < +\infty\}. \quad (6.1.4)$$

Ces fonctions, C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, sont dites fonctions de la classe de Schwartz.

Lemme 6.1 *On a l'implication $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Lemme 6.2 *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par application des dérivations et par produit par un polynôme.*

Proposition 6.3 *On a la formule de transfert fondamentale pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$:*

$$\int_{\mathbf{R}_x^d} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbf{R}_\xi^d} f(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi.$$

La démonstration de ceci s'appuie sur le théorème de Fubini appliqué à la fonction, élément de $L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$, égale à $g(x)f(\xi)e^{-i\xi x}$.

Nous allons identifier l'inverse de la transformée de Fourier par deux méthodes: en utilisant le transfert et en utilisant une limite dans L^1. On commence par la démonstration utilisant le théorème de transfert. Pour cela, on démontre le

Lemme 6.3 *La transformée de Fourier de la fonction gaussienne (élément de $L^1(\mathbb{R})$)*

$$h_a(x) = a^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{ax^2}{2}}$$

est la gaussienne $\hat{h}_a(\xi) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}}$.

Preuve La preuve est très classique. On utilise $\hat{h}_a(0) = \int h_a(x)dx = \int h_1(u)du = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$, puis on démontre que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}(\hat{h}_a(\xi)) &= -i \int a^{\frac{1}{2}} x e^{-a\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx \\ &= i a^{-\frac{1}{2}} [\int (-ax - i\xi) e^{-a\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx + i\xi \int e^{-a\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx] \\ &= -\frac{\xi}{a^{\frac{1}{2}}} \hat{h}_a(\xi). \end{aligned}$$

Ainsi $\hat{h}_a(\xi) = \hat{h}_a(0) e^{-\frac{\xi^2}{2a}}$.

On note $a' = a^{-1}$, ce qui permet d'écrire $\hat{h}_a(\xi) = (\frac{2\pi}{a'})^{\frac{1}{2}} h_{a'}(\xi)$. Ainsi $\mathcal{F}(\hat{h}_a)(x) = (\frac{2\pi}{a'})^{\frac{1}{2}} (\frac{2\pi}{a^{-1}})^{\frac{1}{2}} h_{(a')^{-1}}(x)$, soit

$$\mathcal{F}(\hat{h}_a)(x) = 2\pi h_a(x).$$

Ce résultat est déjà intéressant. La famille des fonctions h_a représente une famille d'approximations de l'identité, c'est-à-dire qu'elle tend vers δ_0, et pour cette famille d'approximations, on a le théorème d'inversion.

D'autre part, si on considère $h_{a,x_0}(x) = h_a(x - x_0)$, on trouve $\mathcal{F}(h_{a,x_0})(\xi) = \int h_a(x - x_0) e^{-ix\xi} dx = e^{-ix_0\xi} \hat{h}_a(\xi)$.

On en déduit le:

Lemme 6.4 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $a \in \mathbb{R}^{+,*}$.*

La transformée de Fourier de la fonction h_{a,x_0} définie par $h_{a,x_0}(x) = \Pi_{j=1}^{j=d} h_{a,x_0^j}(x_j)$ est égale à $(2\pi)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{||\xi||^2}{2a}} e^{-ix_0\cdot\xi}$.

Nous démontrons la proposition

Proposition 6.4 *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$, on a*

$$\mathcal{F}(\hat{f})(x) = (2\pi)^d f(-x).$$

Ainsi, l'inverse de la transformée de Fourier est $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \hat{f}(-\xi)$.

La première formule de transfert est

$$\int \hat{f}(\xi) \hat{h}_{a,x_0}(\xi) d\xi = \int \mathcal{F}(\hat{f})(x) h_{a,x_0}(x) dx.$$

Comme $\hat{h}_{a,x_0}(\xi) = e^{-ix_0\xi}(\frac{2\pi}{a})^{\frac{d}{2}}h_{a^{-1}}(\xi)$, on écrit donc

$$(\frac{2\pi}{a})^{\frac{d}{2}}\int \hat{f}(\xi)e^{-ix_0\xi}h_{a^{-1}}(\xi)d\xi = \int \hat{\hat{f}}(x)h_{a,x_0}(x)dx.$$

D'autre part, on sait que $\mathcal{F}(e^{-ix_0\xi}h_{a^{-1}}(\xi))(x) = \int d\xi e^{-ix\xi}e^{-ix_0\xi}h_{a^{-1}}(\xi) = \hat{h}_{a^{-1}}(x+x_0) = (2\pi a)^{\frac{d}{2}}h_a(x+x_0)$. Donc en utilisant la formule de transfert, on obtient $\int \hat{f}(\xi)e^{-ix_0\xi}h_{a^{-1}}(\xi)d\xi = (2\pi a)^{\frac{d}{2}}\int h_a(x+x_0)f(x)dx$. Tout compte fait, on trouve

$$\int \mathcal{F}(\hat{f})(x)h_{a,x_0}(x)dx = (2\pi)^d\int h_a(x+x_0)f(x)dx,$$

c'est-à-dire

$$\int \mathcal{F}(\hat{f})(x_0+\frac{u}{\sqrt{a}})h_1(u)du = (2\pi)^d\int f(-x_0+\frac{u}{\sqrt{a}})h_1(u)du.$$

Lorsque $f \in L^1\cap C^0$ et $\hat{f} \in L^1$, une application du théorème de la convergence dominée pour les deux termes de cette équation conduit à la relation entre fonctions de fonctions de C^0:

$$\mathcal{F}(\hat{f})(x_0) = (2\pi)^d f(-x_0).$$

D'autre part, pour ϕ de classe C^∞ à support compact, on trouve

$$\int \mathcal{F}(\hat{f})(x)\phi(x)dx = \int \hat{f}(\xi)\hat{\phi}(\xi)d\xi = \int f(x)\mathcal{F}(\hat{\phi})(x)dx.$$

On trouve alors

$$\int \mathcal{F}(\hat{f})(x)\phi(x)dx = (2\pi)^d\int f(x)\phi(-x)dx$$

ce qui permet, par l'unicité de la distribution associée à une fonction de L^1 d'écrire l'égalité dans L^1

$$\mathcal{F}(\hat{f})(x) = (2\pi)^d f(-x).$$

On note par ailleurs que, pour $\phi \in S(\mathbb{R}^d_\xi)$,

$$\begin{array}{rl}(\mathcal{F}\circ\tilde{\mathcal{F}})(\phi)(\xi) = & \int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix.\xi}\tilde{\mathcal{F}}(\phi)(x)dx \\ & = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix.\xi}\mathcal{F}(\phi)(-x)dx \\ & = \int_{\mathbf{R}^d} e^{ix.\xi}\mathcal{F}(\phi)(x)dx \\ & = \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(\phi))(\xi) = (2\pi)^d\phi(\xi)\end{array}.$$

La transformation de Fourier est inversible de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui même, et que sa transformation inverse est $\frac{1}{(2\pi)^d}\tilde{\mathcal{F}}$. La proposition 6.4 est démontrée. De la proposition 6.3, on déduit

Proposition 6.5 *On a l'égalité (de Parseval), pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:*

$$\int_{\mathbf{R}^d}\hat{f}(\xi)\bar{\hat{g}}(\xi)d\xi = (2\pi)^d\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\bar{g}(x)dx.$$

Cette égalité (des produits scalaires) est équivalente à l'égalité des normes

$$\int_{\mathbf{R}^d}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi = (2\pi)^d\int_{\mathbf{R}^d}|f(x)|^2dx.$$

La seule partie non encore faite de cette égalité est le passage à la conjugaison. Dans la formule de transfert, on écrit $g = g_1 + ig_2$, où g_1 et g_2 sont réelles. Alors

$$\int f\bar{g}(x)dx = \int fg_1dx - i\int fg_2dx = (2\pi)^d[\int \hat{f}(\xi)\hat{g}_1(\xi)d\xi - i\int \hat{f}(\xi)\hat{g}_2(\xi)d\xi]$$

Comme g_1 et g_2 sont réelles $\mathcal{F}(g_1+ig_2)(\xi) = \int e^{-ix\xi}(g_1+ig_2)(x)dx$ et donc le complexe conjugué est $\int e^{ix\xi}(g_1 - ig_2) = \hat{g}_1(-\xi) - i\hat{g}_2(-\xi)$, d'où le résultat.

Une autre démonstration On voit donc que, si tout se passait correctement, on étudierait

$$\mathcal{F}\circ\mathcal{F}(f)(-x) = \int e^{ix\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)d\xi = \int e^{i(x-y)\xi}f(y)dyd\xi.$$

Mais la fonction $(y,\xi) \to e^{i(x-y)\xi}f(y)$ n'est pas intégrable, donc on ne peut pas appliquer Fubini. On l'applique à $e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}e^{i(x-y)\xi}f(y)$ qui est dans $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Il vient

$$\int dy(\int d\xi e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}e^{i(x-y)\xi}f(y)) = \int dyf(y)(2\pi)^{\frac{d}{2}}\varepsilon^{-d}e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon^2}}.$$

et

$$\int d\xi(\int dye^{i(x-y).\xi}f(y)e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}) = \int d\xi e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}e^{ix\xi}\hat{f}(\xi).$$

La première manière de calculer l'intégrale s'effectue en remarquant qu'il s'agit d'une régularisation de f, qui converge donc vers $(2\pi)^{\frac{d}{2}}(\int \varepsilon^{-d}e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}dt)f(y)$ au sens des distributions. La deuxième manière de calculer l'intégrale provient d'une limite dans l'espace des fonctions uniformément bornées sur $\mathbb{R}$.

6.2 Définition de la transformation de Fourier dans L^2

Pour l'instant, nous n'avons pas défini la transformée de Fourier autrement que pour les fonctions L^1, puisque la classe de Schwartz est incluse dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. L'égalité de la proposition 6.5 permet d'étendre la définition de la transformée de Fourier aux fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Malheureusement pour ceux qui aiment faire des calculs, l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}f(x)dx$$

n'est pas toujours définie pour $f \in L^2(\mathbb{R})$. Il faut trouver une autre manière de la définir.

Introduisons l'espace V des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ telles que $\hat{f} \in L^1$. Alors on vérifie que la formule de transfert appliquée à $g = \hat{f}$ donne

$$\int_{\mathbf{R}^d} \hat{f}\hat{f}dx = (2\pi)^d\int_{\mathbf{R}^d} ffd\xi$$

ainsi f et $\hat{f}$ sont dans L^2 et $V \subset L^1 \cap L^2$. D'autre part, on voit que, pour $f, g \in V$, on a $(2\pi)^d\int fgdx = \int \hat{f}\hat{g}d\xi$. On construit alors, pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, une suite f_n de fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$ telles que f_n tend vers f au sens de $L^2(\mathbb{R}^d)$. On peut même prendre une suite de fonctions de $C^0(\mathbb{R}^d)$ à support compact, qui est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

On a l'expression

$$\int_{\mathbb{R}^d_\xi} |\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}_m(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)d \int_{\mathbb{R}^d_x} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx.$$

La suite f_n est une suite convergente dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$, donc est une suite de Cauchy. On en déduit que la suite $\hat{f}_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d_\xi)$, qui est complet, donc elle converge.

D'autre part, si considère deux suites f_n et g_n convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f}_n - \hat{g}_n$ converge vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^d_\xi)$, donc $\hat{f}_n$ et $\hat{g}_n$ convergent vers la même limite.

On appelle cette limite transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de la fonction f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On a alors

$$(2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

On note que ce n'est pas un procédé de calcul usuel.

6.3 La transformation de Fourier des distributions

Pour le moment, nous n'avons pas eu besoin de notion de convergence ou de continuité dans l'espace de Schwartz. Si nous voulons introduire des distributions qui puissent agir sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il est nécessaire de définir un ensemble de normes sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. L'action de telles distributions sera alors obtenue de manière immédiate par l'égalité de la proposition 6.3:

$$< \hat{f}, \phi > = < f, \hat{\phi} > . \tag{6.3.5}$$

Nous introduisons alors les normes sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

Proposition 6.6 *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ peut être muni des normes $\mathcal{N}_p$ telles que*

$$\mathcal{N}_p(\phi) = \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \max_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial_x^\beta \phi(x)|.$$

On peut aussi construire $\mathcal{N}_{p,q}$ par

$$\mathcal{N}_{p,q}(\phi) = \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq q} \max_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial_x^\beta \phi(x)|.$$

La transformation de Fourier applique $\mathcal{S}$ dans lui même, et on a la relation:

$$\forall p, \exists C(p,d), \quad \mathcal{N}_p(\hat{\phi}) \leq C(p,d)\mathcal{N}_{p+d+1}(\phi)$$

On a aussi l'inégalité

$$\forall p,q, \exists C(p,q,d), \quad \mathcal{N}_{p,q}(\hat{\phi}) \leq C(p,q,d)\mathcal{N}_{q+d+1,p}(\phi)$$

Nous démontrons uniquement le deuxième alinéa. On a, en effet

$$\mathcal{N}_{p,q}(\hat{\phi}) = \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq q} \max_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{\phi}(\xi)|.$$

On obtient

$$\mathcal{N}_{p,q}(\hat{\phi}) = \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq q} \max_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}(\partial_x^\alpha(x^\beta\phi))(\xi)|.$$

Nous vérifions que

$$\partial_x^\alpha(x^\beta\phi) = \sum_{\alpha'\leq\alpha} C_\alpha^{\alpha'}\partial^{\alpha'}\phi\partial^{\alpha-\alpha'}(x^\beta).$$

De plus, on rappelle que $||\hat{\psi}||_\infty \leq ||\psi||_{L^1(\mathbb{R}^d)}$. On doit multiplier ψ par une fonction polynôme dont l'inverse est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Le candidat naturel est $(1+\sum_{j=1}^{j=d}|x_j|^{d+1})$. Ainsi, on aura

$$||\psi||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{1+\sum_{j=1}^{j=d}|x_j|^{d+1}} \max_{x\in\mathbb{R}^d}(1+\sum_{j=1}^{j=d}|x_j|^{d+1})|\psi(x)|.$$

Appliquant ce résultat à $\psi = \partial^\alpha(x^\beta\phi)$, on trouve que

$$\begin{aligned} ||\mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta\phi))||_\infty &\leq ||\partial^\alpha(x^\beta\phi)||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\max_{x\in\mathbb{R}^d}[(1+\sum_{j=1}^{j=d}|x_j|^{d+1})|\sum_{\alpha'\leq\alpha} C_\alpha^{\alpha'}\partial^{\alpha'}\phi\partial^{\alpha-\alpha'}(x^\beta)|]dx}{1+\sum_{j=1}^{j=d}|x_j|^{d+1}} \end{aligned}$$

En notant $C(\alpha,\beta)$ la constante que l'on obtient en majorant tous les coefficients

$$||\mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta\phi))||_\infty \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{1+\sum_{j=1}^{j=d}|x_j|^{d+1}} C(\alpha,\beta) \sum_{|\alpha'|\leq|\alpha|, |\beta'|\leq|\beta|+d+1} \max_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^{\alpha'}\phi x^{\beta'}|$$

On en déduit l'inégalité, notant $C(p,q) = \max_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq q} C(\alpha,\beta)$

$$\mathcal{N}_{p,q}(\hat{\phi}) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{1+\sum_{j=1}^{j=d}|x_j|^{d+1}} C(p,q)\mathcal{N}_{q+d+1,p}(\phi).$$

L'inégalité du lemme est démontrée.

Bien sûr, lorsque $\phi\in\mathcal{S}$, la norme $\mathcal{N}_{p,q}(\phi)$ existe, car on impose que ϕ et toutes ses dérivées décroissent à l'infini plus vite que toute puissance.

Nous arrivons à un résultat crucial pour lier les distributions aux éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

Lemme 6.5 *Soit $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il existe une suite ϕ_k d'éléments de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que, pour tout p:*

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{N}_p(\phi-\phi_k) = 0$$

La démonstration s'appuie sur une troncature simple. On rappelle que nous avons identifié (Exemple 3.3) une fonction $l_0(x)$ qui est identiquement égale à 1 sur $[-1,1]$ et nulle sur $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$. Nous introduisons, pour ϕ dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la suite de fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ égale à

$$\phi_k(x) = \phi(x) \prod_{j=1}^{j=d} l_0(\frac{x_j}{k}) = \phi(x) l_0^d(\frac{x}{k}).$$

(on a adopté une notation ramassée pour $l_0 \otimes l_0 ... \otimes l_0$) On vérifie immédiatement que $\phi_k(x) = \phi(x)$ pour $|x_j| \leq k$. De plus, par application de la formule de Leibniz, pour α tel que $|\alpha| \leq p$,

$$\partial^\alpha(\phi_k)(x) = \sum_{|\alpha'| \leq |\alpha|} C_\alpha^{\alpha'} k^{-|\alpha'|} \partial^{\alpha'}(l_0^d(\frac{x}{k})) \partial^{\alpha - \alpha'} \phi(x).$$

Ainsi

$$\partial^\alpha(\phi - \phi_k)(x) = \partial^\alpha \phi(x)(1 - \prod_{j=1}^{j=d} l_0(\frac{x_j}{k})) + k^{-1} \sum_{1 \leq |\alpha'| \leq |\alpha|} C_\alpha^{\alpha'} k^{1-|\alpha'|} \partial^\alpha l_0^d(\frac{x}{k}) \partial^{\alpha - \alpha'} \phi(x).$$

On utilise $|x^\beta \partial^{\alpha - \alpha'} \phi| \leq \mathcal{N}_{p+1}(\phi)$. On contrôle uniformément les dérivées de l_0 par une constante C, et nécessairement, comme le terme constant est $x^\beta \partial^\alpha \phi(1 - l_0)$, il est nul pour $|x| \geq k$. Il suffit alors d'utiliser l'inégalité (on note $\beta + \delta_j$ le multi indice où tous les indices sont égaux à β_k sauf l'indice de rang j qui est $\beta_j + 1$) $\mathcal{N}_{p+1}(\phi) \geq |x^{\beta + \delta_j} \partial^\alpha \phi|$ pour majorer $|x^\beta \partial^\alpha \phi(1 - l_0)|$ par $\frac{\mathcal{N}_{p+1}(\phi)}{k}$. On a donc montré

$$\mathcal{N}_p(\phi - \phi_k) \leq \frac{C}{k} \mathcal{N}_{p+1}(\phi),$$

ce qui assure la convergence.

Définition 6.3 *Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On dit que u est une distribution tempérée, élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, si il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que*

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), | < u, \phi > | \leq C \mathcal{N}_p(\phi).$$

Proposition 6.7 *Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on peut prolonger la forme linéaire $\phi \to < u, \phi >$ aux fonctions $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et on a*

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), | < u, \phi > | \leq C \mathcal{N}_p(\phi).$$

Preuve On définit, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la suite ϕ_k du lemme 6.5. On peut alors étudier la suite numérique **qui existe puisque u est une distribution**, $< u, \phi_k >$. On a l'inégalité

$$| < u, \phi_{k+r} - \phi_k > | = | < u, \phi_{k+r} > - < u, \phi_k > | \leq C \mathcal{N}_p(\phi_{k+r} - \phi_k).$$

Le fait que ϕ_k converge dans $\mathcal{S}$ implique que la suite $\mathcal{N}_p(\phi_{k+r} - \phi_k)$ vérifie les inégalités des suites de Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0, k \geq k_0, r \geq 0 \Rightarrow \mathcal{N}_p(\phi_{k+r} - \phi_k) \leq \varepsilon.$$

Ainsi la suite numérique $< u, \phi_k >$ est une suite de Cauchy, qui converge donc vers une limite. Cette limite ne dépend que de la limite de ϕ_k, car si $\tilde{\phi}_k$ converge aussi vers ϕ, alors $| < u, \phi_k > - < u, \tilde{\phi}_k > | \leq C\mathcal{N}_p(\phi_k - \tilde{\phi}_k)$. Le membre de droite de l'inégalité tend vers 0, donc le membre de gauche aussi, ce qui implique l'égalité des limites de $< u, \phi_k >$ et de $< u, \tilde{\phi}_k >$. On note cette limite $u(\phi)$. En faisant tendre k vers l'infini dans l'inégalité

$$| < u, \phi_k > | \leq C\mathcal{N}_p(\phi_k)$$

on obtient $|u(\phi)| \leq C\mathcal{N}_p(\phi)$.

Le prolongement ainsi construit est unique. En effet, si il y avait un autre prolongement $u_1$vérifiant la même inégalité, comme $|u_1(\phi) - u(\phi)| = |u_1(\phi) - u_1(\phi_k) + u(\phi_k) - u(\phi)|$ (car u_1 et u coincident sur C_0^∞), on trouverait, en passant à la limite, que $u_1(\phi) = u(\phi)$. La preuve est terminée.

On a quelques conséquences:

Lemme 6.6 *Toute distribution de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Lemme 6.7 *Toute distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est d'ordre fini.*

On considère, pour le lemme 6.7, un compact K et $\phi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$. On note $M(K, p) = \max_{x \in K, |\beta| \leq p} |x^\beta|$ (il existe). On note $N(K, d, p)$ le nombre de termes dans la somme définissant $\mathcal{N}_p(\phi)$. Alors

$$\mathcal{N}_p(\phi) \leq N(K, d, p)M(K, p) \max_{x \in K, |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Ainsi

$$\forall K, \exists C(K), \forall \phi \in C_0^\infty(K), | < u, \phi > | \leq C(K) \max_{x \in K, |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

De même, pour le lemme 6.6, on introduit le compact K support de u et les compacts K' et K" définis précédemment lorsqu'une distribution u est dans $\mathcal{E}'$. On rappelle que $K \subset K' \subset K$" et $< u, \phi >= 0$ pour ϕ supportée hors de K. Ainsi

$$< u, \phi >=< u, \chi\phi >$$

pour $\chi \equiv 1$ sur K', nulle sur le complémentaire de K". On trouve

$$| < u, \phi > | \leq C \max_{x \in K", |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \phi(x)| \leq C\mathcal{N}_p(\phi),$$

car la somme définissant $\mathcal{N}_p$ comprend déjà des termes majorant tous les termes $\max_{x \in K", |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \phi(x)|$.

Ces outils étant introduits, ayant ainsi généralisé la définition des distributions à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on peut écrire la transformée de Fourier d'une distribution, s'appuyant sur (6.3.5):

Définition 6.4 *(et Proposition) Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de u est une distribution tempérée définie par l'égalité*

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), < \hat{u}, \phi >=< u, \hat{\phi} > .$$

Preuve On remarque d'abord que, si $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, supp$\phi \subset K$ $| < \hat{u}, \phi > | \leq C\mathcal{N}_p(\hat{\phi})$ car u est une distribution tempérée. Ainsi $| < \hat{u}, \phi > | \leq CC_p\mathcal{N}_{p+d+1}(\phi) \leq D_0(K)\max_{|\alpha|\leq p+d+1}|\partial^\alpha\phi|_\infty$. On déduit de ceci que $\hat{u}$ est une distribution. L'inégalité $| < \hat{u}, \phi > | \leq CC_p\mathcal{N}_{p+d+1}(\phi)$ est vraie pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ donc $\hat{u}$ est une distribution tempérée. On en déduit

Lemme 6.8 *$\hat{u}$ est une distribution tempérée d'ordre au plus $p+d+1$ si u est d'ordre p.*

Proposition 6.8 *La transformée de Fourier d'une distribution à support compact u est donnée par l'égalité*

$$\hat{u}(\xi) =< u, f_{-\xi} > .$$

C'est une fonction de classe C^∞ à croissance lente, c'est-à-dire qu'il existe C_M et M telle que $|\hat{u}(\xi)| \leq C_M(1 + |\xi|)^M$.

Notons que, dans ce cas, la distribution u est d'ordre p et que $\hat{u}$ est d'ordre 0.

Preuve On étudie $< \hat{u}, \phi >$ pour $\phi \in \mathcal{S}$. Effectuons un calcul formel

$$< \hat{u}, \phi >= \int \hat{u}(\xi)\phi(\xi)d\xi = \int u(x)\int e^{-ix.\xi}\phi(\xi)d\xi)dx = \int d\xi(\int dxu(x)e^{-ix.\xi})\phi(\xi).$$

On peut appliquer la proposition 4.3. La fonction $\psi(x,\xi) = \phi(\xi)\chi(x)e^{-ix\xi}$, χ étant la fonction intervenant dans la représentation de la distribution à support compact u par $< u, \phi >=< u\phi\chi >$, est de classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. On a alors $\int d\xi < u, \psi(.,\xi >=< u, \int \psi(.,\xi)d\xi >$. On vérifie que $\int \psi(x,\xi)d\xi = \hat{\phi}(x)\chi(x)$ et que $< u, \phi(.,\xi) >= \phi(\xi) < u, f_{-\xi} >$. Ainsi, d'après la proposition 4.3, il vient

$$< u, \hat{\phi}\chi >= \int \phi(\xi) < u, f_{-\xi} > d\xi$$

Comme le terme de gauche est égal à $< u, \hat{\phi} >$ donc à $< \hat{u}, \phi >$, le résultat en découle.

Enfin, par application de la dérivation sous le signe intégrale, la fonction $< u, f_{-\xi} >$ est de classe C^∞. On utilise alors la majoration de u d'ordre fini:

$$| < u, f_{-\xi} > | \leq C\max_{|\alpha|\leq p}|\partial^{(\alpha)}(\chi f_{-\xi}) \leq \tilde{C}\max_{|\alpha|\leq p}|\xi^\alpha| \leq \tilde{C}(1 + |\xi|)^\alpha.$$

La fonction $\hat{u}$ est de classe C^∞ à croissance lente.

Proposition 6.9 *La transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sur lui même. On a $\hat{\hat{u}} = (2\pi)^d\check{u}$.*

On vérifie que $< \hat{\hat{u}}, \phi >=< \hat{u}, \hat{\phi} >$ pour $\phi \in C_0^\infty$. Comme la définition de la transformée de Fourier de u est valable pour $\psi \in \mathcal{S}$, on en déduit que $< \hat{u}, \hat{\phi} >=< u, \mathcal{F}(\hat{\phi}) >= (2\pi)^d < u, \check{\phi} >= (2\pi)^d < \check{u}, \phi >$, d'où le résultat.

Proposition 6.10 *Soit $\tau_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, telle que $\tau_a(\phi)(x) = \phi(x-a)$. La translation τ_as s'étend à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et on a, pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:*

$$\mathcal{F}(\tau_a u) = f_{-a}\hat{u}$$

$$\mathcal{F}[f_a u] = \tau_a \hat{u}$$

$$\mathcal{F}(x \to u(\frac{x}{\lambda})) = |\lambda|^d \hat{u}(\lambda\xi)$$

Si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{u}(\xi) =< u, f_{-\xi} >$ est une fonction de classe C^∞ à croissance lente.

$$\hat{1} = (2\pi)^d \delta_0, \hat{\delta}_0 = 1.$$

Nous voulons maintenant généraliser la formule $\mathcal{F}(f \star g) = \hat{f}.\hat{g}$. Nous avons la

Proposition 6.11 *Lorsque $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors*

- *$u \star v$ est définie et caractérisée par $(u \star v) \star \phi = u \star (v \star \phi)$.*
- *$\mathcal{F}(u \star v) = \hat{u}.\hat{v}$*

Cette proposition s'appuie sur le lemme

Lemme 6.9 *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Il existe une suite de distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers u au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*

Le lemme 6.9 se démontre en considérant la fonction "plateau" l_0 déja introduite, en en considérant, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la fonction test $\phi_j(x) = l_0(\frac{x}{j})\phi(x)$. Ainsi on construit, pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, la distribution v_j telle que

$$< v_j, \phi >=< u, \phi_j > .$$

La distribution v_j est à support compact, puisqu'elle est identiquement nulle lorsque le support de ϕ ne rencontre pas le support de $l_0(\frac{x}{j})$. Alors

$$< v_j - u, \phi >=< u, \phi_j \phi > .$$

Le résultat du lemme 6.5 implique alors le résultat du lemme 6.9.

Preuve de la Proposition 6.11 Le schéma de la démonstration est alors le suivant:

- montrer, lorsque les deux distributions sont à support compact, que la transformée de Fourier de w est le produit des transformées de Fourier de u et de v, utilisant l'égalité

$$\hat{w}(\xi) =< u \star v, f_{-\xi} >$$

- montrer que toute distribution de $\mathcal{S}'$ peut être approchée par une suite de distributions de $\mathcal{E}'$.

On commence par la relation $< u\star v, f_{-\xi} >= (u\star v\star \check{f}_{-\xi})(0) = u\star v\star f_\xi(0)$. On étudie alors la fonction $(v\star f_\xi)(-x) = (\int v(y) f_\xi(-x-y)dy = \int v(y) f_{-\xi}(x+y)dy =< v, f_{-\xi} >$

$e^{-ix.\xi}$) (calcul formel). On s'appuie alors sur la relation $(f_\xi)_{-x}(y) = f_{-\xi}(x+y) = f_{-\xi}(x)f_{-\xi}(y)$, donc $v \star f_\xi(-x) =< v, (f_{-\xi})-x) >=< v, e^{-ix.\xi} f_{-\xi} >$. On en déduit ensuite que $u \star v \star f_\xi)(0) =< \check{u}, (v \star f_\xi) >=< u, < v, f_{-\xi} > f_{-\xi} >$, ce qu'il fallait démontrer:

$$< u \star v, f_{-\xi} >=< u, f_{-\xi} >< v, f_{-\xi} > .$$

La relation est démontrée dans le cas de deux distributions à support compact: $\hat{w} = \hat{u}\hat{v}$. Chaque distribution est une fonction C^∞ à croissance lente. On construit alors la suite u_j de distributions de $\mathcal{E}'$ approchant u dans $\mathcal{S}'$ par $< u_j, \phi >=< u, \phi\phi_j >$. On vérifie que, comme u_j et v sont à support compact,

$$< u_j \star v, \hat{\phi} >=< \hat{u}_j.\hat{v}, \phi >=< \hat{u}_j, \hat{v}\phi > .$$

La fonction ϕ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et $\hat{v}$ est de classe C^∞ à croissance lente, donc $\hat{v}\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous en déduisons que, comme u_j tend vers u dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\hat{u}_j$ tend vers $\hat{u}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, ainsi $< u_j \star v, \hat{\phi} >$ converge vers $< \hat{u}, \phi\hat{v} >$. D'autre part, lorsque $\hat{u}$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{v}$ est une fonction C^∞ à croissance lente, on peut définir la distribution de $\mathcal{S}'$ égale à $\hat{u}\hat{v}$ par l'égalité

$$< \hat{u}.\hat{v}, \psi >=< \hat{u}, \hat{v}\psi > .$$

Ainsi on a vérifié

$$< u_j \star v, \hat{\phi} >\to< \hat{u}.\hat{v}, \phi > .$$

D'autre part, pour terminer la démonstration, $(u_j \star v) \star \phi = u_j \star (v \star \phi)$. Le second membre tend vers $u \star (v \star \phi)) = (u \star v) \star \phi$. Ainsi on vérifie que $u_j \star v$ tend vers $u \star v$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Il vient $< u \star v, \hat{\phi} >=< \hat{u}.\hat{v}, \phi >$. Cela achève la preuve de la proposition 6.11. Notons que dans cette égalité le terme de droite est défini grâce à la propriété de croissance lente de la fonction C^∞ $\hat{v}$ alors que le membre de gauche est défini par un passage à la limite.

Nous avons le lemme immédiat de calcul de transformée de Fourier, déduit de la proposition 6.8:

Lemme 6.10 *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{u}$ est la limite, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, de la suite*

$$< u, w(\frac{x}{j})e^{-ix.\xi} >$$

où w est une fonction de classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, nulle dans un voisinage de 0.

En effet, la distribution $w_j u$ converge vers u et est une distribution à support compact, donc $\mathcal{F}(w_j u)(\xi) =< w_j u, f_{-\xi} >=< u, w_j f_{-\xi} >$, et comme $w_j u$ tend vers u dans $\mathcal{S}'$, alors $\mathcal{F}(w_j u)$ tend vers $\hat{u}$ dans $\mathcal{S}'$.

Nous abordons maintenant une application, connue sous le nom de formule de Poisson:

Lemme 6.11 *La transformée de Fourier de la distribution $S = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k$ est la distribution $2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi k}$*

Preuve: Lorsque $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, il existe N tel que supp $\phi \subset [-N, N]$. Ainsi

$$< S, \phi >= \sum_{p=-N}^{p=N} \phi(p).$$

Nous avons bien un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (la borne est $2N+1$ fois la norme du sup). De plus, $p^2|\phi(p)| \leq \mathcal{N}_2(\phi)$, ainsi, pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$| < S, \phi > | \leq (\frac{\pi^2}{3} + 1)\mathcal{N}_2(\phi).$$

La distribution S est élément de $\mathcal{S}'$.

De plus, la distribution suivante S_ε converge dans $\mathcal{S}'$ vers S:

$$S_\varepsilon = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|k|}\delta_k.$$

En effet, la série de terme général $e^{-\varepsilon|k|}\phi(k)$ converge normalement vers la somme de la série $\phi(k)$.

$$\hat{S}_\varepsilon(\xi) = \lim_{j\to+\infty} < S_\varepsilon, w(\frac{x}{j})e^{-ix.\xi} >= \sum_k e^{-\varepsilon|k|-ik\xi}$$

car cette somme converge absolument. Cette somme vaut

$$\hat{S}_\varepsilon(\xi) = \frac{1 - e^{-2\varepsilon}}{1 - 2e^{-\varepsilon}\cos\xi + e^{-2\varepsilon}}.$$

En prenant $r = e^{-\varepsilon}$, on note que la fonction obtenue s'appelle le **noyau de Poisson**. C'est une fonction périodique, d'intégrale 2π sur une période, telle que $\hat{S}_\varepsilon(\xi)$ converge uniformément vers 0 sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ lorsque $\varepsilon \to 0$. En effet, le dénominateur est minoré par $1 - 2r\cos\alpha + r^2 \geq \sin^2\alpha$ lorsque $\xi \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$, et le numérateur est majoré par $2(1 - e^{-\varepsilon})$. Si $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_\xi)$, alors, avec supp $\phi \subset [\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi]$, on trouve

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{S}_\varepsilon(\xi)\phi(\xi)d\xi = \sum_{p=m}^{n-1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} \hat{S}_\varepsilon(\xi)\phi(\xi - 2p\pi)d\xi.$$

Or

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} \hat{S}_\varepsilon(\xi)\psi(\xi)d\xi = \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi+\alpha} \hat{S}_\varepsilon(\xi)\psi(\xi)d\xi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi-\alpha} \hat{S}_\varepsilon(\xi)\psi(\xi)d\xi + \int_{2\pi+\alpha}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} \hat{S}_\varepsilon(\xi)\psi(\xi)d\xi$$

On majore les deux derniers termes par $||\phi||_\infty 4\pi(1 - e^{-\varepsilon})(\sin^2\alpha)^{-1}$ et on écrit

$$|\int_{2\pi-\alpha}^{2\pi+\alpha} \hat{S}_\varepsilon(\xi)\psi(\xi)d\xi - 2\pi\psi(2\pi) - \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi+\alpha} \hat{S}_\varepsilon(\xi)[\psi(\xi) - \psi(2\pi)]d\xi| \leq \frac{|\psi(2\pi)|4\pi(1 - e^{-\varepsilon})}{\sin^2\alpha}$$

Il suffit alors, se donnant un $\varepsilon > 0$, de choisir convenablement le α, puis ensuite de faire tendre ε vers 0.

On a donc achevé la preuve du lemme 6.11, car $< \hat{S}_\varepsilon, \phi >$ tend vers $\sum 2\pi\phi(-2\pi p)$.

Nous terminons par des propriétés élémentaires de la transformée de Fourier.

Proposition 6.12 *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{u},$$

$$\mathcal{F}(x^\alpha u) = i^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha \hat{u}$$

et, pour une fonction ϕ à croissance lente, sa transformée de Fourier étant dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mathcal{F}(\phi u) = (2\pi)^{-d}\hat{\phi} \star \hat{u}.$$

La démonstration des deux premiers items se fait en considérant par exemple une suite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tendant vers u. La démonstration du troisième item se fait en considérant $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, puis $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et en appliquant le résultat de la Proposition 6.11. On considère alors $\psi = \hat{\phi}$, ce qui nous donne $\phi = \frac{1}{(2\pi)^d}\tilde{\mathcal{F}}(\psi)$, et $v = \hat{u}$, avec la relation analogue $u = \frac{1}{(2\pi)^d}\tilde{\mathcal{F}}(v)$. Ainsi, de la relation de la proposition 6.11 écrite avec $\tilde{\mathcal{F}}$, on tire

$$\tilde{\mathcal{F}}(\psi \star v) = \tilde{\mathcal{F}}(\psi)\tilde{\mathcal{F}}(v)$$

soit

$$\tilde{\mathcal{F}}(\psi \star v) = (2\pi)^{2d}\phi u$$

(les deux membres étant bien définis, car $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ donc ϕ est à croissance lente, ce qui assure que ϕu soit bien définie dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$). On applique alors la transformée de Fourier à cette égalité. Il reste

$$(\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}})(\psi \star v) = (2\pi)^{2d}\mathcal{F}(\phi u).$$

Utilisant la formule d'inversion, on trouve la dernière relation. Remarque: même si une distribution est à croissance lente, alors ce n'est pas forcément la transformée de Fourier d'une distribution à support compact; l'exemple le plus flagrant est la fonction gaussienne, qui est à décroissance rapide donc *a fortiori* à croissance lente, et sa transformée de Fourier est la fonction gaussienne, qui n'est pas à support compact.

6.4 Les équations de convolution

L'exemple modèle que nous étudions est l'équation de convolution:

$$A \star u = f \tag{6.4.6}$$

où A, u et f sont des distributions. On introduit, si elle existe, la solution élémentaire de A élément de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$:

Définition 6.5 *On appelle solution élémentaire de A toute distribution E, si elle existe, qui vérifie*

$$A \star E = \delta_0.$$

Cette distribution permet de reconstruire (et ce terme est vraiment celui qui convient) la distribution u solution de (6.4.6) par la proposition suivante, qui utilise l'associativité du produit de convolution lorsque cela est possible:

Proposition 6.13 *Soit $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution admettant une solution élémentaire.*

1. *Pour toute distribution f à support compact ($f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$), il existe au moins une solution de (6.4.6) qui est dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, qui est $E \star f$ (bien définie puisque on peut convoler une distribution et une distribution à support compact).*

2. *Pour toute $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, il existe au plus une solution de (6.4.6) qui est dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, il s'agit de $E \star f$.*

Preuve On suppose u et w à support compact. Alors

$$(u \star v) \star w = u \star (v \star w).$$

En effet, on rappelle que si w est à support compact, on définit la distribution $v \star w$ par, pour toute $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $w \star \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $(v \star w) \star \phi = v \star (w \star \phi)$. Par cette définition, la fonction $v \star (w \star \phi)$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et donc on a défini $v \star w$. La distribution u est à support compact, donc on peut définir $u \star [(v \star w) \star \phi]$. De même, pour toute $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $(u \star v) \star \psi = u \star (v \star \psi)$, puisque $v \star \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et u à support compact. On applique cette égalité à $\psi = (w \star \phi)$.

On introduit $\tilde{u} = u \star v$ et $\tilde{w} = v \star w$. Ces deux distributions sont définies donc comme produit de convolution entre une distribution et une distribution à support compact. On vérifie successivement

$$\begin{aligned}(u \star \tilde{w}) \star \phi &= u \star (\tilde{w} \star \phi)\\ &= u \star [(v \star w) \star \phi]\\ &= u \star [v \star (w \star \phi)]\\ &= u \star [v \star \psi]\\ &= (u \star v) \star \psi\end{aligned}$$

D'autre part,

$$(\tilde{u} \star w) \star \phi = \tilde{u} \star (w \star \phi) = \tilde{u} \star \psi.$$

Ceci implique que le produit de convolution est associatif lorsque les deux distributions u et w sont à support compact.

Reprenant les notations de la proposition 6.13, on obtient

$$A \star (E \star f) = (A \star E) \star f = \delta \star f.$$

On écrit $(\delta \star f) \star \phi = \delta \star (f \star \phi)$. Or, pour $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $(\delta \star \psi)(x) = \psi(x)$ (il faut se reporter à la définition du produit de convolution d'une distribution et d'une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $(\delta \star \psi)(x) =< \delta, \psi_x >= \psi(x)$). Ainsi, pour toute $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$(\delta \star f) \star \phi = f \star \phi,$$

ce qui assure la relation

$$\delta \star f = f. \tag{6.4.7}$$

Finalement

$$A \star (E \star f) = f.$$

D'autre part, si u est une solution à support compact,

$$u = \delta \star u = (E \star A) \star u.$$

Comme A et u sont à support compact, on peut calculer le produit de convolution (attention: il faut un argument de plus, que nous ne détaillons pas, pour affirmer que le résultat d'associativité est vrai si ce ne sont pas les deux distributions extrêmes qui sont à support compact), et on a associativité. Ainsi on obtient $u = E\star(A\star u) = E\star f$.

Notons que E n'est pas nécessairement à support compact!! La transformation de Fourier est un bon outil pour étudier les équations de convolution. En effet on a

Proposition 6.14 *Lorsque $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, les solutions tempérées, si elles existent, de l'équation de convolution sont données par leur transformée de Fourier*

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{\hat{A}(\xi)}.$$

Avant de poursuivre, remarquons que cette écriture est formelle si $\hat{A}(\xi)$ s'annule. Nous reviendrons sur ce fait. Nous donnons des exemples d'équations de convolution dans ce qui suit:

Lemme 6.12 *Les équations suivantes sont des équations de convolution:*

$$\sum_{\alpha, |\alpha| \leq p} a_\alpha \partial^\alpha u(x) = f(x)$$

(équation aux dérivées partielles usuelle, $A = \sum_{|\alpha|\leq p} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \delta_0^\alpha$)

$$\int K(x-y)u(y)dy = f(x)$$

(équation de Volterra de première espèce $A = K$)

$$\int K(x-y)u(y)dy + u(x) = f(x)$$

(équation de Volterra de deuxième espèce $A = \delta + K$)

$$u(x+h) - u(x) = f(x)$$

(équation aux différences, $A = \delta_{-h} - \delta$).

Lorsque nous appliquons la proposition 6.13 à ces exemples, nous constatons que, pour l'équation aux dérivées partielles

$$\hat{A}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha i^{|\alpha|} \xi^\alpha$$

Ainsi, si $\hat{A}(\xi)$ n'a pas de zéro sur $\mathbb{R}^d$, comme cela est le cas pour l'équation $\Delta u - u = f$, alors on a bien $\hat{u}(\xi) = -\frac{\hat{f}(\xi)}{1+|\xi|^2}$.

Lorsque nous regardons les équations de Volterra, on trouve les relations

$$\hat{K}\hat{u} = \hat{f}$$

pour l'équation de première espèce

$$\hat{u}(\xi) + \hat{K}(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

pour l'équation intégrale de deuxième espèce. Lorsque $\hat{K}$ est bornée, on peut résoudre par série de Neumann, faisant intervenir $(\hat{K})^n$, et on retrouve le résultat classique avec la suite de produits de convolution $K_{n+1} = K_n \star K$, puis $H = \sum(-1)^{n+1}K_n$.

Enfin, pour l'exemple de l'équation aux différences, on trouve que

$$(e^{ih\xi} - 1)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

et le coefficient s'annule pour $h\xi = 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Ceci nous rappelle la notion de partie finie introduite précédemment.

Chapter 7

Théorie élémentaire des espaces de Sobolev

7.0 Introduction

L'introduction de ce chapitre, qui est l'introduction naturelle des espaces de Sobolev, est due à Yves Meyer, auquel je dois beaucoup, et en particulier mon intérêt pour les problèmes de la physique. Le point de départ d'une telle étude est la résolution du problème de Dirichlet, c'est à dire le pendant du problème de trouver le potentiel correspondant à la distribution de charges ρ donnée (équation de Poisson).

Cette fois ci, on se donne un domaine régulier Ω inclus dans $\mathbb{R}^3$, de frontière régulière (un bon exemple est une sphère ou un ellipsoide), et on cherche le potentiel correspondant à un potentiel donné sur le bord de l'ouvert et aucune charge à l'intérieur. C'est donc un problème de condensateur.

Ce problème s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta\phi = 0, x\in\Omega\\ \phi|_{\partial\Omega} = V_0\end{array}\right. \tag{7.0.1}$$

Dirichlet, qui vivait au XIXème siècle, a supposé la fonction V_0 de classe C^1 sur la variété $\partial\Omega$, et recherchait une solution ϕ de classe C^1 sur un ouvert $\bar{\Omega}$ contenant strictement Ω. Il introduit alors l'espace affine H_{V_0} des fonctions ϕ de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ telle que la restriction de ϕ à $\partial\Omega$ soit V_0. Ainsi la solution de (7.0.1) est la solution de l'équation de Laplace dans H_{V_0}.

La méthode de Riemann est la suivante: soit $E(\phi) = \frac{1}{2}\int_\Omega(\nabla\phi)^2dx$ l'énergie associée à ϕ. On peut constater que $E(\phi)\geq 0$ pour tout $\phi\in H_{V_0}$. Ainsi la borne inférieure de $\{E(\phi), \phi\in H_{V_0}\}$ existe et est positive. Riemann suppose que cette borne inférieure est atteinte dans H_{V_0}, il appelle Φ une représentation de cette borne inférieure. Les études précédentes nous donnent que, si on note Ψ une fonction arbitraire de $C_0^\infty(\Omega)$, alors, par définition de la borne inférieure,

$$E(\Phi)\leq E(\Phi+\lambda\Psi).$$

Il vient alors que

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}, \lambda\int_\Omega\nabla\Phi.\nabla\Psi+\frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega(\nabla\Psi)^2dx\geq 0.$$

Il est alors évident que, si $\nabla\Psi \neq 0$, alors cette inégalité est vérifiée pour tout λ si

$$\int_\Omega \nabla\Phi.\nabla\Psi dx = 0, \forall\Psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Cela indique bien sûr, comme $\Psi|_{\partial\Omega} = 0$, par application de la proposition 5.5, que,

$$\forall\Psi \in C_0^\infty(\Omega), \int_\Omega \Phi.\Delta\Psi dx = 0$$

et donc $\Delta\phi = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On pourrait ainsi croire que la solution du problème est une fonction de classe $C^1(\bar{\Omega})$ qui soit solution de l'équation de Laplace au sens des distributions.

Or ce n'est pas le cas. Cette démarche (et je suis toujours Yves Meyer) présente deux inconvénients:

• Lorsque V_0 est dans $C^1(\partial\Omega)$, on n'est pas sûr que le minimum de la fonctionnelle

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\phi)^2 dx$$

lorsque ϕ a pour trace V_0 soit atteint dans $C^1(\Omega)$. Ceci serait un résultat de fermeture pour une norme adaptée à l'espace des fonctions de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ ayant pour trace V_0. Ces résultats sont non triviaux.

• Généralement, de plus, si on prend une fonction V_0 de classe C^1, le problème (7.0.1) n'admet en général pas une solution.

Remarque Pour le premier point, nous ne construisons pas un exemple dans ce cas là, mais pour une autre fonctionnelle, nous montrons qu'il n'y a pas de minimum. Cette fonctionnelle est $J(v) = \int_0^1((|v'(x)| - 1)^2 + (v(x))^2)dx$. Il est clair que $J(v) \geq 0$ et que $J(v) = 0$ n'a pas de solution. D'autre part, on considère une fonction chapeau sur chaque intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, fonction chapeau de dérivée ± 1 (afin d'annuler le terme $(|u'| - 1)^2$). On trouve $u_n(x) = (x - \frac{k}{n}), x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n}]$ et $u_n(x) = -(x - \frac{k+1}{n}), x \in [\frac{k+\frac{1}{2}}{n}, \frac{k+1}{n}]$. On voit que $|u_n'(x)| = 1 p.p.$ et que $2\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}} (u_n^2)(x)dx = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (u_n(x))^2 dx$, ce qui donne $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (u_n(x))^2 dx = 2\int_0^{\frac{1}{2n}} x^2 dx = \frac{2}{3}\frac{1}{8n^3}$. Tous calculs faits $J(u_n) = \frac{1}{12n^2}$ donc $J(u_n)$ tend vers 0, et donc l'inf de J est 0, qui n'est pas atteint.

Nous devons ainsi construire, pour résoudre le problème de Dirichlet, un espace adapté qui soit fermé pour la norme L^2 du gradient (ceci pour que le minimum existe). De plus, cet espace doit être bien adapté à l'application trace (c'est-à-dire que l'on puisse déterminer la fonction $\phi|_{\partial\Omega}$). Ceci sera notre programme ici.

7.1 L'espace $H^1(\Omega)$

Nous appuyant sur cette présentation, nous constatons que nous devons introduire un espace de fonctions, qui soit stable pour la semi-norme d'énergie. Ainsi

$$\int_\Omega [(\partial_{x_1}\phi)^2 + (\partial_{x_2}\phi)^2 + (\partial_{x_3}\phi)^2] dx < +\infty$$

ce qui donne (par exemple)

$$\phi \in H^1(\Omega) \Rightarrow \partial_{x_j}\phi \in L^2(\Omega), j = 1, 2, 3.$$

Si nous ne prenons que cette condition, on peut construire une suite de fonctions u_p, suite de Cauchy pour la norme de l'énergie (soit $\int_\Omega (\nabla u_p - \nabla u_{p+n})^2 dx$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$) vérifiant la condition du membre de droite, ainsi $\partial_{x_j} u_j \to v_j$ car $L^2(\Omega)$ est complet. Malheureusement, on n'assure pas la convergence de la suite (u_p).

Nous rajoutons alors la condition $u \in L^2(\Omega)$. L'espace $H^1(\Omega)$ est défini par

Définition 7.1 *L'espace $H^1(\Omega)$ est le sous ensemble de $L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions telles que leur dérivée au sens des distributions $\partial_{x_j} u$ vérifient*

$$\forall j, \partial_{x_j} u \in L^2(\Omega).$$

On a la

Proposition 7.1 *Muni de la norme*

$$||u|| = (\sum_{|\alpha|\leq 1} ||\partial^\alpha u||^2)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace $H^1(\Omega)$ est un espace complet. C'est un espace de Hilbert

La démonstration est immédiate. En effet, si u_j est une suite de Cauchy pour cette norme, les $\partial^\alpha u_j$ convergent vers v_α dans $L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, On a alors

$$< \partial^\alpha v_0, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < v_0, \partial^\alpha \phi >= (-1)^{|\alpha|} \lim_{j\to\infty} < u_j, \partial^\alpha \phi > .$$

Or $< u_j, \partial^\alpha \phi >= (-1)^{|\alpha|} < \partial^\alpha u_j, \phi >$. On a alors convergence de cette suite vers $(-1)^{|\alpha|} < v_\alpha, \phi >$, ce qui donne l'égalité

$$< \partial^\alpha v_0, \phi >=< v_\alpha, \phi >$$

d'où la convergence des suites (u_p) et de leurs dérivées. Notons que l'on a utilisé l'inclusion $L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ ce qui permet de réécrire la dualité dans L^2 par

$$(U, \phi)_{L^2(\Omega)} =< u, \bar{\phi} >$$

pour $u \in L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Ainsi la fonctionnelle du gradient sur $H^1_{V_0} = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = V_0\}$ aura toujours un minimum tant que V_0 sera la trace d'une fonction de H^1, car dans ce cas, on la note $\tilde{V}$ et $H^1_{V_0} = \tilde{V} + H^1_0(\Omega)$. Il s'agit ainsi d'identifier l'image par l'application trace de $H^1(\Omega)$, l'application trace sur H^1 étant l'extension pour la norme de H^1 de l'application trace sur $C^1(\bar{\Omega})$. Nous définissons plus précisément cela, car on peut alors définir l'espace associé à $\partial\Omega$ comme étant la complétude de $C^\infty_0(\partial\Omega)$ pour la topologie séquentielle induite par la norme H^1.

Lemme 7.1 *Les fonctions de $H^1(\mathbb{R})$ sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$.*

Soit $u \in H^1$. Alors $\partial_x u \in L^2(\mathbb{R})$. Introduisons $v(x) = \int_0^x \partial_x u(s) ds$. Alors $(x > y)$ $|v(x) - v(y)| \leq (\int_x^y (\partial_x u(s))^2 ds)^{\frac{1}{2}} \sqrt{x - y}$. On en déduit que v est continue, et au sens des distributions $< v, \phi' > + < \partial_x u, \phi >= 0$. Donc $v' = \partial_x u$, ainsi $v - u = C$. On en déduit que u est continue. La continuité uniforme vient du caractère L^2 de u.

7.2 Les espaces de Sobolev

On définit plus généralement l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$:

Définition 7.2 *L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est le sous espace de $L^2(\Omega)$ des distributions u telles que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m$, $\partial^\alpha u \in L^2(\Omega)$.*

Proposition 7.2 *L'espace $H^m(\Omega)$, muni de la norme*

$$(\sum_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert.

Une caractérisation très importante des espaces de Sobolev est la suivante, dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$:

Lemme 7.2 *Il est équivalent, pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, d'avoir $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ et d'avoir*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2(1+|\xi|^2)^m d\xi < +\infty.$$

Preuve. On suppose $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2(1+|\xi|^2)^m d\xi < +\infty$. Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ainsi on a, pour tout α, $|\alpha| \leq m$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)\xi^\alpha|^2 < +\infty.$$

Ceci est la traduction de $\mathcal{F}(\partial^\alpha f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, soit $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$. La réciproque est immédiate.

On peut alors étendre les espaces de Sobolev à des indices non entiers pour pouvoir avoir une échelle continue d'espaces.

Définition 7.3 *L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dont la transformée de Fourier appartient à $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi < +\infty\}.$$

Notons ainsi que pour $s \geq 0$, $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Ceci n'est plus vrai pour $s < 0$. L'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ est muni du produit scalaire

$$(S_1, S_2)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\hat{S}}_1(\xi)\hat{S}_2(\xi)(1+|\xi|^2)^s d\xi$$

qui est le produit dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ des deux distributions de $L^2(\mathbb{R}^n)$ égales à $\hat{S}_1(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$ et $\hat{S}_2(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$.

Remarquons que les deux définitions du produit scalaire associées à H^s sont très différentes:

- le produit scalaire sur H^s, déduit de la norme sur cet espace;

$$(S,\phi)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\hat{S}}(\xi)\bar{\hat{\phi}}(\xi)(1+|\xi|^2)^s d\xi$$

• le produit entre $H^s \subset \mathcal{S}'$ et H^s ($\mathcal{S} \subset H^s$):

$$< S, \phi >= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{S}(\xi)\hat{\phi}(-\xi) d\xi.$$

Cette dernière relation provient de la relation (on rappelle que $If(x) = f(-x)$)

$$< S, \phi >=< S, \frac{1}{(2\pi)^n} \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(\phi) >= \frac{1}{(2\pi)^n} < S, I\mathcal{F}(\mathcal{F}(\phi)) >= \frac{1}{(2\pi)^n} < \hat{S}, I\hat{\phi} > .$$

Ces deux égalités sont bien définies lorsque $S \in H^s$ et $\phi \in \mathcal{S}$, mais la deuxième n'est pas définie lorsque ϕ et S sont dans H^s.

On remarque que $\hat{\delta}_a(\xi) = e^{-ia\xi}$, ainsi

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{\delta}_a(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s d\xi.$$

Cette intégrale est convergente pour $s < -\frac{n}{2}$, divergente si $s \geq -\frac{n}{2}$. On en conclut

Lemme 7.3 *La distribution δ_a est dans H^s pour $s < -\frac{n}{2}$.*

De même, $< \mathcal{F}(\partial_{x_j}\delta_a), \phi >=< \partial_{x_j}\delta_a, \hat{\phi} >= - < \delta_a, \partial_{x_j}\hat{\phi} >= i\xi_j e^{-i-a\xi}$. Ainsi on trouve $\partial_{x_j}\delta_a \in H^s$, $s < -\frac{n}{2} - 1$.

On a le

Lemme 7.4 *La distribution $\partial^\alpha \delta_a$ est élément de H^s pour $s < -\frac{n}{2} - |\alpha|$.*

Plus généralement, pour $u \in H^s$, la distribution $\partial^\alpha u$ est dans $H^{s-|\alpha|}$.

Preuve Comme on a démontré que $\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{u}$ dans $\mathcal{S}'$, on en déduit, utilisant $|\xi^\alpha| \leq (1 + |\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}$, que

$$\int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s-|\alpha|} |\xi^\alpha \hat{u}|^2 d\xi < +\infty$$

En effet, comme $u \in H^s$, la fonction $\hat{u}$ est une fonction de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Ceci montre le résultat du lemme.

Rappelons que les espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont denses dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Nous démontrons une conséquence logique du lemme 7.4:

Lemme 7.5 *Si u est une distribution d'ordre fini N, alors $u \in H^{-N-\frac{n}{2}-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. En général, u n'est pas dans $H^{-N-\frac{n}{2}}$.*

preuve On vérifie que pour toute fonction $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, alors $\hat{u}$ est une fonction à croissance lente, qui est donc localement dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus, sa transformée de Fourier est connue par $\hat{u}(\xi) =< u, f_{-\xi} >$. Ainsi, utilisant la relation permettant d'affirmer que $< u, \psi >=< u, \phi\psi >$ pour ψ fonction de classe C^∞ dont toutes les dérivées sont bornées et ϕ caractérisant le support de u, alors

$$| < u, f_{-\xi} > | \leq C_N \max_{|\alpha| \leq N} |\partial^\alpha (e^{-ix.\xi}\phi)| \leq C'_N (1 + |\xi|^2)^{\frac{N}{2}}.$$

On en déduit

$$|\hat{u}(\xi|^2(1+|\xi|^2)^s \leq C_N(1+|\xi|^2)^{s+N}$$

ainsi le terme de droite est d'intégrale convergente lorsque $s+N<-\frac{n}{2}$, ce qui donne le résultat. Il suffit de prendre δ_a pour constater que $\delta_a \in H^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}$ mais $\delta_a \notin H^{-\frac{n}{2}}$.

Achevons par une proposition qui permet de définir les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$ pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

Proposition 7.3 *Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, alors $\phi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$*

Ainsi, pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on dit que $u \in H^s(\Omega)$ si on a, pour tout $K \subset \Omega$, $\forall \phi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

7.3 Le théorème de trace dans $H^s(\mathbb{R}^{n+1})$

Nous allons, à partir de H^s, généraliser la notion d'application trace, de $\mathbb{R}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour cela, nous écrivons $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, et

$$\begin{array}{llll} \gamma: & \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ & f(x,t) & \to & f(x,0) = \gamma f(x) \end{array}$$

Théorème 7.1 *Si $s > \frac{1}{2}$, l'application de restriction usuelle γ se prolonge en une application continue γ de $H^s(\mathbb{R}^{n+1})$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$.*

Il suffit de vérifier, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, l'inégalité

$$||\gamma\phi||_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^n)} \leq C_s||\phi||_{H^s(\mathbf{R}^{n+1})}. \tag{7.3.2}$$

Pour cela, considérons $\psi(x) = \phi(x,0)$. Ainsi

$$\hat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\xi}\phi(x,0)dx.$$

Notons $\tilde{\phi}(x,\tau) = \int_{\mathbf{R}} e^{-it\tau}\phi(x,t)dt$ la transformée de Fourier partielle de ϕ par raport à t. Ainsi par inversion de Fourier

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \tilde{\phi}(x,\tau)e^{it\tau}d\tau$$

et ainsi

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \tilde{\phi}(x,\tau)d\tau.$$

$$\begin{array}{rl} \hat{\psi}(\xi) & = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\xi}dx \int_{\mathbf{R}} d\tau\tilde{\phi}(x,\tau) \\ & = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} d\tau \int_{\mathbf{R}^{n+1}} e^{-ix\xi-it\tau}\phi(x,t)dxdt \\ & = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}(\xi,\tau)d\tau. \end{array}$$

On en déduit

$$|\hat{\psi}(\xi)|^2 = |\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}(\xi,\tau)(1+|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{s}{2}}(1+|\xi|^2+\tau^2)^{-\frac{s}{2}}|^2.$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$|\hat{\psi}(\xi)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}} |\hat{\phi}(\xi,\tau)|^2(1+|\xi|^2+\tau^2)^s d\tau \int_{\mathbf{R}}(1+|\xi|^2+\tau^2)^{-s}d\tau.$$

Dans l'intégrale ne comportant pas ϕ, on effectue $\tau = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}u$. Il reste

$$|\hat{\psi}(\xi)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}} |\hat{\phi}(\xi,\tau)|^2(1+|\xi|^2+\tau^2)^s d\tau (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}-s}\int_{\mathbf{R}}(1+u^2)^{-s}du.$$

On intègre alors en ξ pour obtenir

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{s-\frac{1}{2}}d\xi \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}}\frac{du}{(1+u^2)^s}\int_{\mathbf{R}^n} d\xi \int_{\mathbf{R}} |\hat{\phi}(x,\tau)|^2(1+|\xi|^2+\tau^2)^s d\tau.$$

On a l'inégalité (7.3.2) avec $C_s = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}}\frac{du}{(1+u^2)^s}$.

L'inégalité, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, $||\gamma\phi||_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^n)} \leq C_s||\phi||_{H^s(\mathbf{R}^{n+1})}$ implique que γ peut être prolongée par continuité de $H^s(\mathbb{R}^{n+1})$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ pour $s > \frac{1}{2}$. Pour ce faire, on considère $\phi_p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ convergeant vers u au sens de $H^s(\mathbb{R}^{n+1})$ (on peut aussi prendre une suite de fonctions test usuelles). La suite $\gamma\phi_p$ est une suite de Cauchy dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$, qui converge car l'espace est de Hilbert. La limite ne dépend pas de la suite ϕ_p choisie; on la note γu et cela définit le prolongement par continuité de γ à $H^s(\mathbb{R}^{n+1})$.

7.4 Le théorème de trace dans $H^1(\Omega)$

7.4.1 Le cas du demi espace

Dans ce qui suit, nous allons appliquer ce résultat pour obtenir un théorème de trace pour la restriction au bord dans un demi-espace. Nous restreignons l'étude au cas $s = 1$, ce qui fait que l'on peut parler, pour $\Omega = \{(x,t), t > 0\}$ de $H^1(\Omega)$.

Théorème 7.2 *L'espace vectoriel, noté $\mathcal{C}_0^\infty(\bar{\Omega})$, des restrictions à Ω des fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, est dense dans $H^1(\Omega)$.*

La trace

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & C_0^\infty(\bar{\Omega}) & \to & C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \\ & \phi(x,t) & \to & \phi(x,0) = \gamma\phi(x) \end{array}$$

se prolonge en un opérateur continu de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

preuve On construit une suite convergente en "débordant de $t = 0$". Prenons ainsi $u \in H^1(\Omega)$. Il lui correspond une distribution U dans $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ qui vaut u sur Ω et 0 sur $\{t \leq 0\}$. Notons, par la formule des sauts, que U n'est pas en général dans $H^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

On considère une fonction de classe C_0^∞, supportée dans $\{-2 \leq t \leq -1\}$, d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}^{n+1}$, positive. Alors ϕ_ε donnée par $\phi_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\phi(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon})$ est une approximation de l'identité. La suite de fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, donnée par

$$u_\varepsilon = U \star \phi_\varepsilon$$

converge vers u pour la norme $H^1(\Omega)$. Elle ne dépend pas du prolongment choisi pour u. En effet

$$U \star \phi_\varepsilon(x,t) = \int dy \int_{-2\varepsilon}^{-\varepsilon} u(x-y, t-s)ds.$$

Ceci implique que $\partial_t(U \star \phi_\varepsilon) = (1_\Omega \partial_t u) \star \phi_\varepsilon$ et $\partial_x(U \star \phi_\varepsilon) = (1_\Omega \partial_x u) \star \phi_\varepsilon$, les deux produits de convolution existant puisque, comme $u \in H^1(\Omega)$, $\partial_x u \in L^2(\Omega)$ et on peut prolonger une distribution de $L^2(\Omega)$ par 0 pour obtenir une distribution de $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$. ϕ_ε est une approximation de l'identité, donc on a

$$||u - u_\varepsilon||_{H^1(\Omega)} = (||u - u_\varepsilon||^2_{L^2(\Omega)} + ||\partial_x u - \partial_x u_\varepsilon||^2_{L^2(\Omega)} + ||\partial_t u - \partial_t u_\varepsilon||^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

qui tend vers 0.

Enfin, on prend une fonction à support compact $\chi(x,t)$, et la fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, restreinte à Ω (définition d'un élément de $C_0^\infty(\bar{\Omega})$), égale à $\chi(\varepsilon x, \varepsilon t) u_\varepsilon(x,t)$, tend vers u dans $H^1(\Omega)$.

Pour démontrer le deuxième alinéa, on introduit **l'opérateur de symétrisation** qui à u associe $v(x,t) = u(x,|t|)$. Par un calcul simple, $\partial_x v(x,t) = \partial_x u(x,|t|)$, $\partial_t v(x,t) = \frac{t}{|t|}\partial_x u(x,|t|)$ (la deuxième égalité utilisant la formule des sauts pour les distributions). Ainsi

$$||v||_{L^2(\mathbf{R}^{n+1})} = \sqrt{2}||u||_{L^2(\Omega)}, ||\partial_x v||_{L^2(\mathbf{R}^{n+1})} = \sqrt{2}||\partial_x u||_{L^2(\Omega)}, ||\partial_t v||_{L^2(\mathbf{R}^{n+1})} = \sqrt{2}||\partial_t u||_{L^2(\Omega)},$$

ce qui prouve l'égalité cherchée $||v||_{H^1(\mathbf{R}^{n+1})} = \sqrt{2}||u||_{H^1(\Omega)}$. Ainsi, pour $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\bar{\Omega})$, comme $\gamma u = u(x,0) = v(x,0)$ et que l'on a l'inégalité (7.3.2) pour v, on a

$$||v(x,0)||_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^n)} \leq C_s ||v||_{H^1(\mathbf{R}^{n+1})} = C_s\sqrt{2}||u||_{H^1(\Omega)}.$$

La preuve du théorème est complète.

7.4.2 Formulation invariante par difféomorphisme de l'appartenance à $H^s(\mathbb{R}^n)$

Nous continuons par un résultat fort, qui nous est nécessaire pour définir l'appartenance à $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ lorsque le bord $\partial\Omega$ est régulier:

Proposition 7.4 *Pour $0 < s < 1$, les deux conditions sont équivalentes:*
- *la fonction sommable f est dans $H^s(\mathbb{R}^n)$*
- *l'inégalité est vraie*

$$\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy < +\infty.$$

Pour cela, on écrit le changement de variable $(x, y) \to (x, x + h)$. Ainsi

$$\int_{A\times B} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dxdy = \int_{A\times(B_A)} \frac{|f(x) - f(x + h)|^2}{|h|^{n+2s}} dxdh.$$

Comme on reconnait, pour tout h fixé, $||f - f(. + h)||^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}$, par transformée de Fourier, on trouve

$$||f - f(. + h)||^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 |1 - e^{ih\xi}|^2 d\xi$$

Il faut alors calculer, si cette intégrale est finie,

$$\int_{\mathbf{R}^n} |e^{ih\xi} - 1|^2 \frac{dh}{|h|^{n+2s}}.$$

Les techniques classiques de calcul sont d'abord de remarquer que cette intégrale est invariante par rotation en ξ, car elle est invariante par rotation en h. Ainsi, désignant par B_R la boule de centre 0 et de rayon R

$$\int_{B_R} |e^{ih\xi} - 1|^2 \frac{dh}{|h|^{n+2s}} = \int_{B_R} |e^{ih|\xi|} - 1|^2 \frac{dh}{|h|^{n+2s}}.$$

On effectue ensuite le changement d'échelle $h = \frac{u\theta}{|\xi|}$, où θ est de module 1 sur la sphère unité, ainsi

$$\int_{B_R} |e^{ih\xi} - 1|^2 \frac{dh}{|h|^{n+2s}} = |\xi|^{2s} \int_{S_{n-1}} d\theta \int_0^{R|\xi|} |e^{iu} - 1|^2 \frac{du}{u^{1+2s}}.$$

Comme $0 < s < 1$, l'intégrale converge en $+\infty$, et comme $|\frac{e^{iu}-1}{u}|$ est continue en 0, l'intégrand est u^{1-2s}, dont l'exposant est strictement supérieur à -1, donc il y a convergence en 0. On peut donc prendre la limite $R \to \infty$, ce qui donne

$$\int_{\mathbf{R}^n} |e^{ih\xi} - 1|^2 \frac{dh}{|h|^{n+2s}} = 4|\xi|^{2s} \int_{S_{n-1}} d\theta \int_0^{\infty} \sin^2 \frac{u}{2} \frac{du}{u^{1+2s}}.$$

Ainsi il existe une constante $\gamma(s, n)$ telle que

$$||f - f(. + h)||^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \gamma(s, n)|\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2$$

Comme $|\xi|^{2s} \le (1 + |\xi|^2)^s \le 2^s \max(1, |\xi|^{2s})$, on a l'équivalence souhaitée.

On en déduit directement:

Proposition 7.5 *Si Φ est un difféomorphisme d'un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage de $b \in \mathbb{R}^n$, et si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ au voisinage de b, alors $f \circ \Phi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ au voisinage de a.*

En effet, Φ étant un difféomorhisme local, il existe dans un voisinage de a une constante C telle que $C^{-1}|x - y| \le |\Phi(x) - \Phi(y)| \le C|x - y|$, et donc, si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ au voisinage de a, en effectuant le changement de variable

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} \frac{|f \circ \Phi(x) - f \circ \Phi(y)|}{|\Phi(x) - \Phi(y)|} |\Phi'(x)||\Phi'(y)| dxdy < +\infty.$$

Utilisant les majorations et minorations $C' \le |\Phi'(x)||\Phi'(y)|$, on a

$$\frac{|f\circ\Phi(x)-f\circ\Phi(y)|}{|x-y|^{n+2s}} \leq \frac{1}{C^{n+2s}C'}\frac{|f\circ\Phi(x)-f\circ\Phi(y)|}{|\Phi(x)-\Phi(y)|^{n+2s}|\Phi'(x)||\Phi'(y)|},$$

ce qui assure l'appartenance locale de $f\circ\Phi$ à H^s.

7.4.3 Le théorème de trace

On est armés pour écrire

Théorème 7.3 *Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^{n+1}$.*

Soit $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ l'espace des fonctions g, définies et élément de $L^2(\partial\Omega, ds)$, telles que si Φ est un difféomorphisme envoyant localement $\mathbb{R}^n$ sur $\partial\Omega$, alors $g\circ\Phi(x)|\Phi'(x)|\in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

L'opérateur γ de trace se prolonge par continuité en un opérateur continu de $H^1(\Omega)$ sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

La démonstration est une conséquence de l'invariance par difféomorphisme des espaces $H^s(\Omega)$ pour $0\leq s\leq 1$, pour $s=0,1$ cela provient de la définition en termes de dérivées et pour $0<s<1$ de la proposition 7.4. Elle utilise la définition de l'application trace pour le demi-espace et le fait que, localement, le bord de l'ouvert régulier s'écrit (les coordonnées étant réordonnées de sorte que l'on puisse appliquer le théorème des fonctions implicites sur une variable) $\partial\Omega$ est localement $t=B(x)$, et que Ω est localement $t>B(x)$, et d'introduire le difféomorphisme local

$$(x,t)\to(x,t-B(x))$$

qui nous ramène au cas du demi-espace.

7.5 Décomposition de l'espace $H^1(\Omega)$ avec les solutions du Laplacien

Nous étudions le programme de Riemann (Problème de Dirichlet) dans les deux cas suivants:

• l'espace Ω est le demi hyperplan $t>0$

• l'espace Ω est un ouvert borné régulier.

Les techniques employées seront très différentes. En effet, dans le premier cas, on peut faire explicitement les calculs de résolution des problèmes, et dans le deuxième cas, la norme sur $H^1_0(\Omega)$ est la norme idéale pour résoudre le problème.

7.5.1 Cas du demi-espace

Soit $H^1_*(\Omega)$ le sous espace composé des solutions de $\Delta u=u$ au sens des distributions, lorsque Ω est le demi espace ou un ouvert borné régulier. Soit $H^1_0(\Omega)$ le noyau de γ (espaces des distributions de $H^1(\Omega)$ de trace nulle sur le bord)

Nous démontrons

Théorème 7.4 • *L'application γ est un isomorphisme de $H^1_*(\Omega)$ sur $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ (cas du demi-espace).*

• *L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ et une fonction de $H_0^1(\Omega)$ prolongée par 0 à l'extérieur donne une fonction de $H^1(\mathbb{R}^{n+1})$,*

• *On a la décomposition $H^1(\Omega) = H_*^1(\Omega) \otimes H_0^1(\Omega)$.*

Dans le cas où $\Omega = \{t > 0\}$, on peut résoudre explicitement le problème $\Delta u = u$ dans Ω, $\gamma u = f$, $u \in H^1(\Omega)$, $f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$. En effet, considérant la transformée de Fourier partielle en x du système d'équations, on se ramène à

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(\xi,t) - |\xi|^2\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}(\xi,t)$$

avec la condition $\hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi)$. Il vient évidemment

$$\hat{u}(\xi,t) = A(\xi)e^{(|\xi|^2+1)^{\frac{1}{2}}t} + B(\xi)e^{-(|\xi|^2+1)^{\frac{1}{2}}t},$$

avec $A(\xi) + B(\xi) = \hat{f}(\xi)$ et la seule solution telle que $\hat{u}(\xi,t)$ soit dans $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ si A et B sont à croissance lente est obtenue pour $A = 0$.

On trouve alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-2(|\xi|^2+1)^{\frac{1}{2}}t} d\xi dt &= \int_{\mathbf{R}^n} d\xi |\hat{f}(\xi)|^2 \int_0^\infty e^{-2(|\xi|^2+1)^{\frac{1}{2}}t} dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} d\xi |\hat{f}(\xi)|^2 (|\xi|^2+1)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

De plus, on vérifie que

$$||\partial_t u||^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 |(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}|^2 (|\xi|^2+1)^{-\frac{1}{2}} d\xi$$

et que

$$||\partial_x u||^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 |\xi_j|^2 (|\xi|^2+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ainsi

$$||u||^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{n+2}{2}||f||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^n)}$$

puisque $|\xi_j|^2 \leq 1 + |\xi^2|$ et que $1 \leq 1 + |\xi|^2$.

On en conclut que la solution ainsi construite est dans $H^1(\Omega)$ et que l'application qui, à u solution de $\Delta u = u$ dans Ω fait correspondre sa trace est un isomorphisme de $H_*^1(\Omega)$ sur $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.

On vérifie ensuite que, pour $H_0^1(\Omega)$, la proposition suivante est vraie:

Proposition 7.6 *Si $u \in H^1(\Omega)$, alors, si U est l'élément de $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ égal à u sur Ω et à 0 sur $t < 0$,*

$$\partial_{x_j} U = \begin{cases} \partial_{x_j} u, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$$\partial_t U = V + \gamma u \otimes \delta_0(t)$$

avec

$$V = \begin{cases} \partial_t u, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

On en déduit par exemple que $U \in H^1(\mathbb{R}^{n+1}) \Leftrightarrow u \in H^1_0(\Omega)$.

Enfin, considérons un élément de $H^1(\Omega)$. Il existe un unique élément de $H^1_*(\Omega)$, égal à

$$u^*(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-(|\xi|^2+1)^{\frac{1}{2}}t}\mathcal{F}(\gamma u)(\xi)d\xi.$$

tel que $\gamma u^* = \gamma u$. Alors la décomposition $u = u - u^* + u^*$ est la décomposition de Hodge de u. De plus, la somme $H^1_*(\Omega) + H^1_0(\Omega)$ est directe, car si $u \in H^1_0(\Omega)$ est solution de $\Delta u = u$, par construction ou par produit par une fonction test ϕ, on trouve que, pour $\phi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{n+1})$,

$$\int_\Omega u\phi dx = -\int_\Omega (\nabla u)(\nabla\phi)dx + 0$$

puisque $\gamma u = 0$, ainsi, utilisant la densité de $C^\infty_0(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, on peut prendre $\phi_j \to u$, ce qui donne $||u||^2_{H^1(\Omega)} = 0$.

7.5.2 Cas de l'ouvert borné régulier

Théorème 7.5 *Soit Ω un ouvert régulier borné. Soit $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Alors*

$$\inf\{\int_\Omega (\nabla u)^2 dx, u \in H^1(\Omega), \gamma u = g\}$$

est atteint en une fonction u solution du problème de Dirichlet

$$\Delta u = 0, x \in \Omega, \gamma u = g.$$

Il est indispensable d'avoir Ω borné; en effet on a

Lemme 7.6 *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit*

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix.\xi - t|\xi|}\hat{f}(\xi)d\xi$$

Il n'existe pas de constante $c > 0$ telle que,

$$||u||_{L^2(\mathbf{R}^n\times]0,+\infty[)} \leq c||f||_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^n)}.$$

Ce résultat est une conséquence de $||u||_{L^2(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^*_+)} = \int_{\mathbf{R}^n}\frac{|\hat{f}(\xi)|^2}{2|\xi|}d\xi$. On prend alors $\hat{f}(\xi) = \frac{|\xi|^\gamma}{1+|\xi|^2}$, pour lequel $|f|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^n)}$ existe, et est majoré uniformément en $\gamma < \frac{1}{4}$ et d'un autre côté $||u||_{L^2}$ tend vers $+\infty$ lorsque γ tend vers 0.

Théorème 7.6 *Le théorème 7.5 est faux si Ω n'est pas borné.*

L'exemple déduit du lemme 7.6 est $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{1+|x|^2}$, pour lequel u n'est pas dans L^2.

La démonstration du théorème 7.5 s'appuie sur le lemme de Poincaré, dans le cas de l'ouvert borné régulier:

Lemme 7.7 *(Poincaré) Les normes $||u||_{H^1(\Omega)}$ et $||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$ sont équivalentes sur $H^1_0(\Omega)$, où l'espace $H^1_0(\Omega)$ est le noyau de γ dans $H^1(\Omega)$.*

et sur le lemme de Lax-Milgram, obtenu en introduisant le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H^1_0(\Omega)$ pour la dualité entre distributions

$$S \in H^{-1}(\Omega) \Leftrightarrow \forall \phi \in C^\infty_0(\Omega), | < S, \phi > | \leq C||\phi||_{H^1_0(\Omega)}.$$

Lemme 7.8 *(Lax-Milgram)*
L'opérateur Δ est un isomorphisme de $H^1_0(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$.

Notons que le lemme de Poincaré n'est pas vrai lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$. Il n'est vrai que parce que Ω est un ouvert borné.

On sait que Ω est donc contenu dans un cube de côté $2R$ centré au point 0 (ceci pour dire que $\Omega \subset \{x, |x_j| \leq R\}$). Deux méthodes sont accessibles: décomposition en série de Fourier, et inégalité directe. La première est plus précise.

Par inégalité directe, on a

$$u(x_1, ...x_{n-1}, x_n) = \int_{-R}^{x_n} \partial_{x_n} u(x_1, ..x_{n-1}, t)dt.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve, pour tout x,

$$|u(x_a, ...x_{n-1}, x_n)|^2 \leq \int_{-R}^{x_n} dt \int_{-R}^{x_n} |\partial_{x_n} u(x_1, ...x_{n-1}, t)|^2 dt.$$

On majore donc par $(x_n + R) \int_{-R}^{R} |\partial_{x_n} u(x_1, ...x_{n-1}, t)|^2 dt$. On intégre par rapport à toutes les variables, il reste

$$\int_{C_R} |u(x)|^2 dx \leq 2R^2 \int_{C_R} |\partial_{x_n} u(x)|^2 dx.$$

ce qui est l'inégalité demandée pour assurer l'équivalence des normes. On a utilisé que nous étions dans $H^1_0(\Omega)$ et non dans $\mathbb{R}^n(\Omega)$ dans le fait que l'inégalité est obtenue pour des fonctions de $C^\infty_0(\Omega)$, puisqu'il n'y a pas de terme constant dans la somme $\int_{-R}^{x_n}$ et que l'espace $C^\infty_0(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$.

D'autre part, par décomposition en série de Fourier d'un élément de $C^\infty_0(C_R)$,

$$u(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n, \mu_1\mu_2...\mu_n \neq 0} a_\mu \sin(\frac{i\pi\mu_j}{R} x_j)$$

et

$$\partial_{x_j} u(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n, \mu_1\mu_2...\mu_n \neq 0} i\frac{\pi}{R} \mu_j a_\mu \cos(\frac{i\pi\mu_j}{R} x_j).$$

Quant on calcule les normes L^2 de ces deux fonctions, on trouve $\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} |a_\mu|^2$ et $\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} [(\mu_1)^2 + (\mu_2)^2 + ... + (\mu_n)^2] \frac{\pi^2}{R^2} |a_\mu|^2$. Le dernier nombre est un entier, d'où l'inégalité

$$\int_{C_R} |u(x)|^2 dx \leq \frac{R^2}{\pi^2} \int_{C_R} (\nabla u)^2(x) dx$$

La constante est meilleure. Remarquons que lorsque la taille de l'ouvert grandit, la constante grandit. Notons que ceci permet de considérer $H_0^1(\Omega)$ comme un espace de Hilbert muni de la norme $\int_\Omega (\nabla v)^2 dx$, qui est équivalente à la norme $H^1(\Omega)$.

Pour démontrer le lemme de Lax-Milgram, nous vérifions trivialement, au sens des distributions, pour $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la relation $\int_\Omega \phi \Delta v dx = -\int_\Omega \nabla\phi.\nabla v dx$ (ce sont des intégrations sur $\mathbb{R}^n$). De plus, pour $v \in H^1(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, cette égalité est vraie. Ainsi, on peut étendre la forme bilinéaire $\int_\Omega \nabla v \nabla\phi$, lorsque $v \in H^1(\Omega)$, à $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Ceci permet donc de dire que $w = \Delta v$ est une forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$, telle que

$$|\int_\Omega w\phi dx| \leq ||v||_{H_0^1(\Omega)} ||\phi||_{H_0^1(\Omega)},$$

et cette forme linéaire est continue sur $H_0^1(\Omega)$. C'est, par définition, un élément du dual de $H_0^1(\Omega)$, que l'on a noté $H^{-1}(\Omega)$. On a utilisé ici une première fois le lemme de Poincaré, et donc le fait que Ω est borné.

Pour démontrer le lemme de Lax-Milgram (Lemme 7.8), on considère $S \in H^{-1}(\Omega)$. Si on veut montrer que il existe u telle que $\Delta u = S$, alors, nécessairement, u est solution de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega S v dx.$$

La norme $(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ et la norme $||v||_{H^1(\Omega)}$ sont équivalentes. Ainsi, comme $S \in H^{-1}(\Omega)$,

$$|\int_\Omega S v dx| \leq C|v|_{H_0^1(\Omega)}$$

(par définition de la dualité).

Le produit scalaire $\int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme usuelle. Le théorème de représentation de Riesz implique qu'il existe un représentant u de la forme linéaire $v \to -\int_\Omega S v dx$ pour ce produit scalaire, qui vérifie donc

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), -\int_\Omega S v dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

ce qui donne évidemment, pour toute $\phi \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, l'égalité

$$\int_\Omega \Delta u \phi dx = \int S\phi dx.$$

On a l'existence par ce moyen.

L'unicité du représentant dans $H_0^1(\Omega)$ vient de l'égalité $\int_\Omega u\Delta u dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$, car $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\Delta u = 0 \in H^{-1}(\Omega)$. Ainsi $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 0$, et, par le lemme de Poincaré, comme cette norme est équivalente dans $H_0^1(\Omega)$ à la norme $H^1(\Omega)$, et que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, $u = 0$.

Chapter 8

Annexe: Applications et compléments

8.1 Solution fondamentale d'opérateurs d'évolution

Nous étudions ici la solution fondamentale de l'opérateur des ondes, de l'opérateur de Shrodinger, de l'opérateur de la chaleur.

Pour les ondes On recherche $u(x,t)$, solution de l'équation des ondes, telle que $u(x,0) = u_0(x)$ et $\partial_t u(x,0) = u_1(x)$. On suppose que u_0 et U_1 sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Par transformée de Fourier

$$\partial_{t^2}^2 \hat{u}(\xi,t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = 0$$

ce qui donne

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi)\cos(|\xi|t) + \frac{\hat{u}_1(\xi)}{|\xi|}\sin(|\xi|t).$$

C'est une distribution tempérée, et on a donc une solution de l'équation des ondes par transformée de Fourier inverse

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi+i|\xi|t}\frac{1}{2}[\hat{u}_0(\xi) + \frac{\hat{u}_1(\xi)}{i|\xi|}] + e^{ix\xi-i|\xi|t}\frac{1}{2}[\hat{u}_0(\xi) - \frac{\hat{u}_1(\xi)}{i|\xi|}].$$

Nous avons obtenu une représentation intégrale de la solution.

Remarque Lorsque $|x| \neq t$, on vérifie que la dérivée de $x\xi \pm |\xi|t$ en ξ est $x \pm + \frac{\xi}{|\xi|}t$, qui est non nul. Etudions le comportement de l'intégrand en k. La dérivée n'est pas nulle, donc $\frac{1}{x+\frac{\xi}{|\xi|}t}e^{i(x\xi+t|\xi|)} = \frac{1}{i}\frac{d}{d\xi}(e^{i(x\xi+t|\xi|)})$, et on peut réaliser une intégration par parties en ξ dans l'intégrale. Ceci indique que l'on se ramène donc à

$$\int_{\mathbf{R}^n_\xi} \frac{d}{d\xi}[f_0(\xi)(x + \frac{\xi}{|\xi|}t)]e^{ix\xi+it|\xi|}d\xi.$$

Poursuivant l'opération autant de fois que l'on veut, si on suppose $f_0(\xi)$ à croissance lente, on aboutira à un moment à une intégrale absolument convergente en ξ, donc la fonction obtenue sera très régulière en (x,t). Ainsi, si f_0 est la transformée de Fourier d'une distribution peu irrégulière, pour tout point tel que $|x| \neq t$, la fonction obtenue sera $C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_+)$ hors de ce que l'on appelle le cône de lumière.

La méthode qui a été utilisée ici est la méthode de la phase non stationnaire, puisque on a pu dériver par rapport à ξ la phase et que cette phase ne s'annule pas.

L'équation de la chaleur On considère l'équation

$$(\partial_t - \Delta)E = \delta_{x=t=0}.$$

Sa solution est la solution fondamentale de la chaleur. Par transformée de Fourier partielle en x, on trouve

$$(\partial_t + |\xi|^2)\hat{E}(\xi, t) = \delta_{t=0}$$

ainsi, en supposant que nous cherchons la solution supportée dans le futur $t \geq 0$

$$\hat{E}(\xi, t) = H(t)e^{-t|\xi|^2}.$$

Ainsi, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$,

$$< \hat{E}, \phi >=< E, \hat{\phi} >= \int_0^\infty dt \int_{\mathbf{R}^n} \phi(t, \xi)e^{-t|\xi|^2} d\xi.$$

On calcule la transformée de Fourier d'une gaussienne dans $\mathbb{R}^n$, $t > 0$ étant un paramètre. Alors, par formule d'inversion de Fourier, on trouve

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-t\xi^2 + ix\xi} d\xi = \int_{\mathbf{R}} e^{-t(\xi - i\frac{x}{2t})^2} d\xi e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

et on constate que l'intégrale est indépendante de x (c'est-à-dire que l'on peut déformer le contour d'intégration, qui est $\mathbb{R}$, dans le plan complexe) et que sa valeur est $(\frac{\pi}{2t})^{\frac{1}{2}}$. Utilisant l'égalité de Parseval

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi(t, \xi)e^{it|\xi|^2} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\phi}(t, x)(\frac{\pi}{2t})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx$$

soit

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi(t, \xi)e^{-t|\xi|^2} d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \hat{\phi}(t, x)e^{-\frac{|x|^2}{4t}} d\xi.$$

On identifie ainsi

$$< E, \hat{\phi} >= \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \hat{\phi}(t, x) dt dx.$$

La fonction $H(t)\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ est localement sommable. C'est donc la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. On aura ainsi (le sens du temps étant imposé) la solution dans $t > 0$ de $(\partial_t - \Delta)u = 0$, $u(x, 0) = f$, sous la forme

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy$$

L'équation de Schrödinger On vérifie, toujours en transformée de Fourier, que la solution élémentaire de l'opérateur de Shrodinger est la solution de

$$(i\partial_t + |\xi|^2)S(\xi, t) = \delta_{t=0}.$$

On choisit la solution supportée dans $t \geq 0$. Lorsque $t \neq 0$, on trouve $S(\xi, t) = S(\xi, 0)e^{i|\xi|^2 t}$ Pour obtenir $\delta_{t=0}$ et que S soit supportée dans $t \geq 0$, on trouve

$$S(\xi, t) = H(t)e^{it|\xi|^2}.$$

On vérifie alors que $u(x) = e^{ix^2}$ vérifie $u' = 2ixu$. Réciproquement, si u est une distribution vérifiant cette égalité, alors, au sens des distributions $(ue^{-ix^2})' = 0$. En effet, pour $\phi \in \mathcal{S}$,

$$< (ue^{-ix^2})', \phi >= - < ue^{-ix^2}, \phi' >= - < u, e^{-ix^2}\phi' > .$$

Comme $(e^{-ix^2}\phi') = (e^{-ix^2}\phi)' + 2ixe^{ix^2}\phi$, on trouve

$$\begin{aligned} < (ue^{-ix^2})', \phi > &= - < u, (e^{-ix^2}\phi)' > - < u, 2ixe^{-ix^2}\phi > \\ &=< u', e^{-ix^2}\phi > + < u, 2ixe^{-ix^2}\phi >= 0 \end{aligned}$$

On vérifie que, comme les seules distributions dont la dérivée est nulle sont les constantes, $e^{-ix^2}u = C$, ce qui veut dire $< e^{-ix^2}u, \phi >= C\int_{\mathbf{R}} \phi(x)dx$. On a fini.

Les distributions ainsi obtenues sont des distributions tempérées, donc elles admettent une transformée de Fourier, et on a

$$i\xi\hat{u} = -2(\partial_\xi \hat{u})$$

donc $\partial_\xi \hat{u} = -2i\frac{\xi}{4}\hat{u}$, et cette distribution est alors $C'e^{-i\frac{|\xi|^2}{4}}$.

Cette fois ci, on n'a pas une fonction localement sommable en appliquant les résultats précédents. La constante vaut $\pi^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}$.

8.2 Les relations de Rankine-Hugoniot

On suppose que nous étudions un système de type conservatif, c'est-à-dire

$$\partial_t U + \partial_x(F(U)) = 0$$

On suppose que, dans l'espace (x, t), il existe une solution de classe C^1 pour $x - \sigma t < 0$, notée U_1, et une solution de classe C^1, notée U_2, pour $x - \sigma t > 0$. On peut alors écrire

$$V(x, t) = U_1(x, t) + (U_2(x, t) - U_1(x, t))H(x - \sigma t).$$

Cette fonction coincide avec U_1 pour $x < \sigma t$ et avec U_2 pour $x > \sigma t$. Ainsi $\partial_t V + \partial_x(F(V))$ est nulle pour $x \neq \sigma t$.

On vérifie

$$\partial_t V(x,t) = \partial_t U_1(x,t) + (\partial_t U_2(x,t) - \partial_t U_1(x,t))H(x-\sigma t) - \sigma\delta_{x-\sigma t=0} \otimes (U_2(x,t) - U_1(x,t))$$

$$\partial_t V = \partial_t U_1 + (\partial_t U_2 - \partial_t U_1)H(x-\sigma t) - \sigma\delta_{x-\sigma t=0}(U_2(\sigma t,t) - U_1(\sigma t,t).$$

De même, on applique la formule de dérivation des distributions à $F(V)$. On trouve

$$\begin{array}{rl}\partial_x(F(V)) = & \partial_x(F(U_1)) + (\partial_x(F(U_2)) - \partial_x(F(U_1)))H(x-\sigma t) \\ & +[F(U_2(\sigma t,t)) - F(U_1(\sigma t,t))]\delta_{x-\sigma t=0}.\end{array}$$

Il vient ainsi

$$\partial_t V + \partial_x(F(V)) = [F(U_2(\sigma t,t)) - F(U_1(\sigma t,t)) - \sigma(U_2(\sigma t,t) - U_1(\sigma t,t))]\delta_{x-\sigma t=0}.$$

Si on veut que V soit solution de l'équation conservative au sens des distributions, il faut que $F(U_2) - F(U_1) = \sigma[U_2 - U_1]$ sur la surface de discontinuité.

Bibliography

[1] J. M. Bony: *Analyse* Cours à l'Ecole Polytechnique, Promotion 1988

[2] M. Balabane *Théorie élémentaire des distributions, application aux équations de Laplace* Cours à l'Ecole des Ponts et Chaussées, 1993

[3] R. Dautray et J. L. Lions *Analyse mathématique pour les sciences et techniques.* Editions Masson

[4] P. A. M. Dirac Fundamentals of quantum mechanics, 1935.

[5] O. Heaviside 1893

[6] M. Kern *Distributions, Transformée de Fourier* Cours à l'Ecole des Mines, Promotion 1996

[7] S. Kokh*Analyse Apppliquée 2* Cours à l'Institut Galilée, spécialité MACS www.ispg.fr

[8] G. Lebeau*Théorie des distributions et analyse de Fourier* Cours à l'Ecole Polytechnique, 1998.

[9] F. Maisonneuve *Calcul intégral, Mathématiques 2* Cours à l'Ecole des Mines de Paris, tronc commun.

[10] Y. Meyer: *Analyse fonctionnelle et calcul différentiel* Cours à l'Ecole Polytechnique, Promotion 1984

[11] L. Schwartz *Méthodes Mathématiques pour la Physique* Editions Hermann