Institut Galilée
Département de Mathématiques

20 mars 2007
Macs 2- Semestre 2

TD-Distributions

feuille 4

Exercice 1 :
1) Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que pour $a \in \mathbb{R}$

$$e^{ax}(S * T) = (e^{ax}S) * (e^{ax}T).$$

2) Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Prouver que pour $k \in \mathbb{N}$

$$x^k(S * T) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j (x^j S) * (x^{k-j}T).$$

3) Soient $p, q, m, n \in \mathbb{N}$, calculer $T = [x^p \delta_0^{(q)}] * [x^m \delta_0^{(n)}]$.

Exercice 2 : Calculer les convolutions suivantes :

$$\delta_0 * H, \quad (1 * \delta_0') * H \quad \text{et} \quad 1 * (\delta_0' * H).$$

Ici H désigne la fonction de Heaviside.

Exercice 3 : Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\delta_h * u - u).$$

Exercice 4 : Calculer le produit $f * f * \cdots * f$ de n convolutions lorsque :
1. $f(t) = H(t)e^{-t}$.
2. $f(t) = H(t)$.

Exercice 5 : On note $D(0,1) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$ et $d\sigma$ la mesure sur l'hypersurface $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| = 1\}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $u(x) = (1 - |x|^2)\mathbf{1}_{D(0,1)}(x)$.

1. Calculer $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ au sens des distributions.
2. Calculer Δu. Ici Δ désigne le laplacien.

Exercice 6 :
1. Trouver une distribution $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{supp}(T_0) \subset [0, +\infty[$ et $T_0' = \delta_0$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, déduire de 1) l'existence d'une distribution $T_\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{supp}(T_\lambda) \subset [0, +\infty[$ et $T_\lambda' - \lambda T_\lambda = \delta_0$.
(Considérer $e^{-\lambda x}T_\lambda$).
3. Soit $S = \delta_0' - \lambda\delta_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ avec $T * S = \delta_0$.
4. Soit $S \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Existe-t-il $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T * S = \delta_0$. Justifier