TD-Distributions

feuille 3

Exercice 1 :
1. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Calculer $T = x^p \delta_0^{(q)}$,
   où $\delta_0^{(j)}$ est la dérivée $j^{\text{ième}}$ de la mesure de Dirac en 0 sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $j \in \mathbb{N}$. Calculer $e^{\alpha x}(\dfrac{d}{dx})^j \delta_0$.

Exercice 2 : Calculer les dérivées des distributions suivantes :
1. δ_0.
2. $\operatorname{sgn}(x)$.
3. $\log |x|$
4. x_+^α, $\Re\alpha \notin \mathbb{Z}_-$.

Exercice 3 : (valeur principale)
On considère la distribution suivante :

$$< T, \varphi >= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

1. Vérifier que T est bien une distribution. Déterminer son ordre et son support.
2. Montrer que l'on a également

$$< T, \varphi >= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2x}\, dx.$$

$$= \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

La distribution T est appelée valeur principale de $\frac{1}{x}$ et est notée $\operatorname{vp}(\frac{1}{x})$.

Exercice 4 :
1. Calculer la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $u_\epsilon(x) = 1_{\{x>0\}}\epsilon x^{\epsilon-1}$ lorsque $\epsilon \to 0^+$.
2. On pose pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $< T, \varphi >= \displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$
   a) Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   b) Calculer $\dfrac{d}{dx}\big(1_{\{x>0\}} \log x\big)$.

Exercice 5 : On considère l'application linéaire T de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2) \ni \phi \mapsto < T, \phi >= \int_{\mathbb{R}} \phi(x, -x)\, dx.$$

a) Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

b) Déterminer le support de T. Montrer que T n'est pas une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer au sens des distributions $\Big(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial y}\Big)T$.

Exercice 6 : On considère la distribution $E = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{t-|x|>0}$, calculer au sens des distributions $\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 E}{\partial y^2}$.

Exercice 7 :

1. Montrer que $z^{-1} = (x+iy)^{-1}$ définit une distribution sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\overline{\partial}(z^{-1})$, où l'opérateur $\overline{\partial}$ est défini par $\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$

Exercice 8 : On se place dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $E = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ définit une distribution.
2. Calculer ΔE au sens des distributions.

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ les équations

$$xT = 0, \quad xT = c,$$

où c est une constante non-nulle.

Exercice 10 : Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ tels que le produit $f\text{v.p}(\frac{1}{x})$ soit égal à $\alpha\text{v.p}(\frac{1}{x}) + g$.