Institut Galilée 06 février 2007
Département de Mathématiques *Macs 2- Semestre 2*

TD-Distributions

feuille 2

Exercice 1 :
a) Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on pose $T(\varphi) = \varphi'(0)$. Montrer que T est une distribution, d'ordre inférieur ou égal à 1.
b) Soit $\psi \in C_0^\infty(]-1,1[;[0,1])$, $=1$ près de 0. On pose $\psi_n(x) = x\psi(nx)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et n entier. Calculer $T(\psi_n)$ et $||\psi_n||_\infty$. En déduire que T est d'ordre 1.
c) Soit $p \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}$. Montrer que $S : \varphi \mapsto \varphi^{(p)}(a)$ est une distribution d'ordre p.
d) Démontrer que l'application définie par

$$< T_1, \phi >= \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(n)$$

est une distribution et calculer son ordre.

Indication : On pourra considérer la suite $\varphi_j\big(2^j(x-k-1)\big)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty\big([-1,1]\big)$ si l'on suppose cette distribution d'ordre k .

Exercice 2 :
1. Montrer que $T : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2}\,dx$ est une distribution. Déterminer son ordre.

2. Montrer que $S : \varphi \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\log x\,dx$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1.

3. Est-ce que S est d'ordre 0 ?
(On pourra considérer une suite φ_n de fonction $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, avec $0 \le \varphi_n \le 1,\ \varphi_n = 0$ sur $]0, \frac{1}{n}[,\ \varphi_n = 1$ sur $]\frac{2}{n}, 1]$).

Exercice 3 :
Montrer que l'expression $T(\psi) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \dfrac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}}\psi(\dfrac{1}{p})$ définit une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1.

Exercice 4 : On note $H(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x)$ la fonction de Heaviside et on note $x_+^\alpha = x^\alpha H(x)$ lorsque $\Re\alpha > -1$. Ces fonctions sont-elles des distributions ?

1. Montrer la formule suivante :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \varphi(x)\,dx = \int_0^1 x^\alpha\Big(\varphi(x)-\varphi(0)\Big)\,dx + \int_1^{+\infty} x^\alpha\varphi(x)\,dx + \frac{\varphi(0)}{\alpha+1}$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ lorsque $\Re\alpha > -1$.

2. Déduire que l'on peut définir une famille de distributions x_+^α lorsque $\Re\alpha > -2$ qui coïncident avec les fonctions définies auparavant lorsque $\Re\alpha > -1$.

3. Généraliser aux autres valeurs de α, puis aux fonctions $x_-^\alpha = H(-x)x^\alpha$.

4. Calculer $x \cdot x_\pm^\alpha$.

Exercice 5 :
a) Démontrer que toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ la limite lorsque ϵ tend vers 0 de

$$\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx - 2\frac{\phi(0)}{\epsilon}$$

existe et ceci définit une distribution (la partie finie de $\frac{1}{x^2}$, notée $\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2})$).
Déterminer l'ordre de cette distribution.

b) Définir $\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^k}),\ k$ entier ≥ 3.

Exercice 6 :
Soit f une fonction intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ telle que :

$$\exists C > 0,\ \exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ |f(x)| \leq \frac{C}{|x|^p}\ \forall x;\ |x| \leq 1.$$

Montrer qu'il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$< T, \psi >= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\psi(x)\,dx$$

pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathrm{supp}\psi \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Exercice 7 :
Montrer qu'il n'existe pas de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que

$$< T, \phi >= \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{x^2}}\phi(x)\,dx$$

pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.
(On exhibera une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $\{\frac{1}{n} < |x| < \frac{2}{n}\}$ tendant vers 0 dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et telle que $< T, \phi_n >$ tende vers l'infini).

Exercice 8 :
Calculer la limite de la suite de distributions $T_n = T_{f_n}$ où $f_n(\cdot) = n^d\chi(n\cdot),\ \chi \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 9 :
Calculer la limite des suites de distributions T_{f_n} définies par les fonctions suivantes :

i) $f_n(x) = \sin nx$

ii) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{x}$

iii) $f_n(x) = n\sin(nx)1_{\{x\geq 0\}}$

iv) $f_n(x) = \dfrac{|x|^{\frac{1}{n}-1}}{2n}$.

Exercice 10 :
Étudier la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ puis dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite de distributions suivantes :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(\delta_{\frac{1}{k}} - \delta_{-\frac{1}{k}}),$$

où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres complexes.