TD-Distributions

Feuille 1

Exercice 1 :
On considère la fonction ρ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } & x > 0 \\ 0 \text{ si } & x \leq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que ρ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'existence d'une fonction non-triviale Φ_0 définie sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant Φ_0, C^∞, à support compact (dans la boule fermée unité), positive et radiale.

On pose $\Phi(x) = \dfrac{\Phi_0(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_0(t)\, dt}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $\epsilon > 0$, on considère la fonction

$$\Phi_\epsilon(\cdot) = \epsilon^{-d}\Phi(\frac{\cdot}{\epsilon}).$$

3. Vérifier que Φ_ϵ est positive, à support dans la boule fermée de centre l'origine et rayon ϵ et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_\epsilon(t)\, dt = 1$.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. On note $K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d;\ d(x,K) \leq \epsilon\}$ où $d(x,K) = \inf_{y \in K} ||x-y||$.

4. Montrer qu'il existe une fonction Θ_ϵ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifiant :

$$0 \leq \Theta_\epsilon \leq 1, \quad \Theta_\epsilon = 1 \text{ sur } K, \text{ et } \ \Theta_\epsilon = 0 \text{ sur } K_{2\epsilon}^c.$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, K un compact de Ω et U un ouvert de Ω tel que $K \subset U$ et $\overline{U} \subset \Omega$.

5. Montrer qu'il existe une fonction $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \Phi = 1 \text{ sur } K \\ \Phi = 0 \text{ dans } U^c \\ 0 \leq \Phi \leq 1\ . \end{cases}$$

Exercice 2 :
Soit $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ tel que $h(0) = h'(0) = \cdots = h^{(n)}(0) = 0$. Démontrer que la fonction $x \mapsto f(x) = x^{-n-1}h(x)$ admet un prolongement en un élément de $C^\infty(\mathbb{R})$ dont on précisera la valeur en 0.

Exercice 3 : (*Théorème de Borel*)
1. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi = 1$ dans $[-1,1]$ et soit, pour tout entier n,

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n \phi(\mu_n x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que l'on peut choisir les réels μ_n de telle sorte que pour tout $n \geq 1$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n^{(k)}(x)\right| \leq 2^{-n} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n-1.$$

2. En déduire que la série $\sum f_n$ converge vers une fonction f qui vérifie $f \in C^\infty$ et $f^{(k)}(0) = a_k,\ \forall k$ entier. (c'est le théorème de Borel).

Exercice 4 :
Soient $u \in \mathbb{R}^d$ et $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Si $h \in \mathbb{R}^*$ on définit l'élément ϕ_h de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ par

$$\phi_h(x) = \frac{\phi(x+hu) - \phi(x)}{h}.$$

Montrer que la suite $(\phi_{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et déterminer sa limite.

Exercice 5 :
Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \psi \not\equiv 0$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n}\psi(\frac{x}{n}).$$

Démontrer que la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 dans C^∞ mais pas dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 6 : (*Inégalité de Poincaré*)
1. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Prouver que pour $j = 1, 2, \cdots, d$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|^2\, dx = -2\mathrm{Re}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} x_j \phi(x) \frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x_j}(x)\, dx\Big).$$

2. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Montrer en utilisant 1., qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\int_\Omega |\phi(x)|^2\, dx \leq C \sum_{j=1}^d \int_\Omega \left|\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)\right|^2 dx$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Exercice 7 : (*Fonctions homogènes*)
On dit que f est une fonction **homogène** d'ordre $p \in \mathbb{R}$ si pour tout $\lambda > 0$

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x), \quad \forall x.$$

1. Donner des exemples de fonctions homogènes. Démontrer que les dérivées successives d'une fonction homogène sont elles-mêmes homogènes.

2. Prouver les formules d' **Euler**

$$x \cdot \nabla f(x) = pf(x), \quad f''(x)x \cdot x = p(p-1)f(x),$$

où f'' désigne la matrice Hessienne de f, c'est à dire la matrice dont les coefficients sont $\partial^2_{x_i x_j} f$.

3. Que pensez-vous de la régularité d'une fonction homogène à l'origine? Donner des exemples.