Institut Galilée 23 janvier 2007
Département de Mathématiques *Macs 2- Semestre 2*

TD-Distributions

Révision : Analyse fonctionnelle

Exercice 1 : Les fonctions suivantes sont-elles intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue ?

$$f_1(x) = \mathbf{1}_{]0,1]}(x)\sin\big(\frac{1}{x}\big), \quad f_2(x) = \frac{\sin\ x}{x},$$

$$f_3(x) = \frac{1}{(x^2+2x)^{3/2}}\mathbf{1}_{]0,4]}(x), \quad f_4(x) = e^{-x^2+2x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x),$$

$$f_5(x) = \mathbf{1}_{]0,1]}(x)\frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{et} \quad f_6(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Exercice 2 : Montrer que, pour tous $a, b \in]0, +\infty[$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2} \ .$$

Exercice 3 : soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Exercice 4 : Étudier si les théorèmes de Beppo Lévi, Fatou et Lebesgue s'appliquent à chacune des suites de fonctions suivantes sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue :

$$f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[n,+\infty[}(x), \quad g_n = n\mathbf{1}_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}(x), \quad h_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}(x), \quad j_n = n(-1)^n\mathbf{1}_{[n,n+1]}(x),$$

$$\text{et} \quad \Big(k_{2n} = \mathbf{1}_{[0,1]}(x), k_{2n+1} = \mathbf{1}_{[1,2]}(x)\Big).$$

Exercice 5 : Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite de chacune des expressions suivantes :

1- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n (\ln x)\big(1 - \frac{x}{n}\big)^n\,dx$,

2- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\,dx$,

3- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-n\sin^2 x} f(x)\,dx$, où f est une fonction Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Étudier l'appartenance à $L^1(\mathbb{R})$ et à $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions suivantes :

$$f(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t), \quad g(t) = \frac{\sin t}{t} \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t).$$

Exercice 7 : Soient $p, q, r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |(fg)(x)|^r\, dx\Big)^{\frac{1}{r}} \leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^q\, dx\Big)^{\frac{1}{q}}$$

et que $fg \in L^r(\mathbb{R})$.

Exercice 8 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par :

$$g(x,y) = \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2}$$

pour tous $x, y \geq 0$.

1- Montrer que, pour tout $\mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto g(x,y)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Soit alors :

$$G(y) = \int_0^{+\infty} g(x,y)\, dx$$

pour tout $y \in \mathbb{R}_+$.

2- Montrer que G est continue sur $[0,+\infty[$.

3- Déterminer la limite de $G(y)$ quand y tend vers $+\infty$.

4- Montrer que G est dérivable sur $[\epsilon,+\infty[$ (où $\epsilon > 0$ fixé), puis sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner une expression de sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9 : On considère la fonction suivante :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{(t^2+x^2)^{4/3}}\, dx.$$

a- Trouver le domaine de définition de F .

b- Trouver le domaine de continuité ainsi que le domaine de dérivabilité de F .

Exercice 10 : Soit $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. En remarquant que $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{-x}{x^2+y^2}\Big) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, calculer

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\, dx\Big)\, dy \quad \text{et} \quad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\, dy\Big)\, dx.$$

Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique-t-il pas ?

Exercice 11 : Calculer $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} \exp\big(-a(x^2+y^2)\big)\, dxdy$ pour $a > 0$.