(Analyse Numérique 1) Méthodes d'approximation numérique des équations elliptiques : Dérivation faible, Espaces de Sobolev, Traces et Formulation Faible

- version 1.2 - Partie 1 -

Novembre 2007

Table des matières

Chapitre 1

Résultats fondamentaux

1.1 Introduction

1.1.1 Application linéaires

Proposition 1. *Soit f une application linéaire $E \to F$, E et F espaces vectoriels normés. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue*
2. *f est lipschitzienne*
3. *$\exists C > 0$, $\|f(u)\|_F \leq C\|u\|_E \; \forall u \in E$*

Proposition 2. *Le noyau $f^{-1}(0) = Ker(f)$ d'une application linéaire $f : E \to F$ continue est un sous-espace fermé de E.*

Proposition 3. *L'image réciproque d'un fermé par une application linéaire continue est un fermé.*

Définition 1. *Une forme linéaire est une application linéaire dont l'espace d'arrivée est l'ensemble des réels.*

Proposition 4. *Soit f une forme linéaire de $E \to \mathbb{R}$. Elle est continue si et seulement si son noyau est fermé.*

Théorème 1. ***(Théorème de Riesz)*** *Soit E un Hilbert sur un le corp $\mathbb{C}$. On note $(.,.)$ le produit scalaire sur cet espace vectoriel. On note E^* le dual de E (ensemble des formes linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$).Alors :*

$$\forall \phi \in E^*, \exists! a_\phi \in E, t.q. \forall x \in E, \phi(x) = (x, a_\phi)$$

Définition 2. *Soit V espace vectoriel normé. La forme bilinéaire $a(.,.)$ est V-elliptique si et seulement si $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2$*

1.1.2 Espaces vectoriels normés

On ne rappel pas ce qu'est un espace vectoriel.

Définition 3. *Une norme sur un espace vectoriel E est une application notée généralement $\|.\|_E$ de E dans $\mathbb{R}$, vérifiant les propriétés suivantes :*

$$\|x\|_E \geq 0, \quad \forall x \in E$$
$$\|x\|_E = 0 \longleftrightarrow x = 0$$
$$\|\lambda x\|_E = |\lambda|\|x\|_E \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in C$$
$$\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E \quad \forall x, y \in E$$

Définition 4. *Soit V un espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur V une forme bilinéaire (u, v) de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$, définie positive.*

Définition 5. *Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.*

Définition 6. *Une suite $(x_n)_{n \in N}$ est dite de Cauchy dans un espace vectoriel V normé lorsque :*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0, \; \forall p, q > n_0 \textit{ on ait } \|x_p - x_q\|_V < \epsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy mais la réciproque est fausse. Une suite peut être de Cauchy pour une norme et pas pour une autre : la notion de suite de Cauchy est une notion métrique non topologique.

Définition 7. *Un espace complet est un espace dans lequel toutes les suites de Cauchy convergent.*

Définition 8. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Définition 9. *Un espace de Hilbert est un espace vecoriel muni d'un produit scalaire, complet pour la norme associée.*

Théorème 2. ***(Cauchy schwartz discret)*** *Soit a_i, b_i $1 \leq i \leq d$ des réels. On a alors l'inégailté suivante :*

$$(\sum_{i=1}^{d} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{d} a_i^2)(\sum_{i=1}^{d} b_i^2)$$

Théorème 3. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*** *Soit V un espace vectoriel muni du produit scalaire $(.,.)_V$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit donc :*

$$|(u,v)_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V \ \forall u, v \in V.$$

Théorème 4. *Un sous-espace vectoriel d'un espace complet est complet si et seulement si il est fermé.*

Corollaire 1. *Un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace complet est complet.*

Théorème 5. *On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé est compacte si toute suite de A possède une suite extraite convergente. On appelle cette propriété, propriété de Bolzano-Weierstrass.*

Corollaire 2. *Dans $\mathbb{R}$, une partie est compact si et seulement si elle est fermé bornée. Exemple : un segment.*

Définition 10. ***(Application compacte)*** *Soit $A : H_1 \longrightarrow H_2$, H_1 et H_2 Hilbert. Soit u_n une suite bornée de H_1. Si on peut extraire une suite u_{ϕ_n} tel que Au_{ϕ_n} converge dans H_2 alors A est compacte.*

1.1.3 Rappels physiques

Dans cette sous section, o va définir le gradient d'une quantité, le laplacien et l'opérateur nabla ∇.

Définition 11. *A tout champs scalaire $f(M)$, M point d'un espace de dimension N, on associe un champ vectoriel $\overrightarrow{grad} f$ tel que :*

$$df(M) = \overrightarrow{grad} f . d\overrightarrow{OM}$$

On note : $\overrightarrow{grad} = \overrightarrow{\nabla}$ ou plus simplement ∇ l'opérateur gradient. Cet opérateur s'applique a une fonction de N variables réelle et renvoit un vecteur de taille N.

Proposition 5. *Soit $f(M) = f(x_1, ..., x_N)$ et soit $\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_N}$ les vecteurs de base de l'espace $\mathbb{R}^N$. Alors*

$$\overrightarrow{grad}.f = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \overrightarrow{e_i}$$

Preuve :
On a $df = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Le vecteur de déplacement $d\overrightarrow{OM}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$d\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{N} dx_i \overrightarrow{e_i}$$

Donc par identification à l'aide de la définition on obtient :

$$\overrightarrow{grad}.f = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \overrightarrow{e_i}$$

Définition 12. ***(Opérateur Laplacien)*** *On définit l'opérateur Laplacien en dimension N, qui transforme un champ scalaire en champ scalaire, par :*

$$\Delta f = div(\overrightarrow{grad}.f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

On a la relation suivante :

$$\Delta . = \overrightarrow{\nabla}^2.$$

Proposition 6. *On a dans $\mathbb{R}^N$:*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Définition 13. ***(Opérateur divergence)*** *Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ et soit $d\tau$ un élément de volume entourant un point M de l'espace. On définit :*

$$div(\overrightarrow{V}) = \frac{d\phi}{d\tau}$$

où $d\phi$ est le flux élémentaire sortant du champ $\overrightarrow{V}$ à travers la surface fermée délimitant $d\tau$.

Rem :

- *$div(\overrightarrow{V})$ représente le flux volumique en M.*
- *L'opérateur divergence construit un champ de scalaire à partir d'un champ de vecteurs.*

Proposition 7. *En coordonnées cartésiennes l'opérateur divergence s'écrit :*

$$div(.) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial .}{\partial x_i}$$

d'où :

$$div(\overrightarrow{V}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$$

Remarque 1. *On a la relation suivante :*

$$div(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{V}$$

1.2 Espaces de Lebesgue

1.2.1 Définition

Définition 14. *L'espace $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$ est l'espace des fonctions dont la puissance $p-ieme$ est intégrable sur Ω.*

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions bornées presque partout dans Ω.

1.
$$L^p(\Omega) = \{f, \quad \int_\Omega f^p < \infty\}$$

2.
$$L^\infty(\Omega) = \{f, \quad \exists C > 0, tq, |f(x)| < C, \quad p.p.x\}$$

Définition 15. *Muni du produit scalaire*

$$(f,g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Muni de la norme $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = inf(C \in \mathbb{R}^+, \ |f(x)| < C \ \ p.p.x, dans \ \Omega)$ l'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

Théorème 6. *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ alors :*

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega), \text{ pour } 1 \leq q \leq p \leq \infty$$

Théorème 7. ***(Inégalité de Young)*** *Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, $p \in]1, \infty[$, p' défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors on a :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p}$$

Théorème 8. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $p \in [1, \infty]$, p' défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors on a $fg \in L^1(\Omega)$, c'est à dire :*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

1.2.2 Résultats de densité

Définition 16. *On note $C_c^\infty(\Omega)$ (ou $D(\Omega)$), l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω.(parfois noté $C_0^\infty(\Omega)$).*

Définition 17. *On dit d'un sous-espace vectoriel A de E qu'il est dense dans E s'il pour tout élément f de E, il existe une suite $\phi_n \in A$ telle que :*

$$lim_{n\to\infty} \|f - \phi_n\|_E = 0$$

Théorème 9. *L'espace $C_0^0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ $\forall p, t.q. 1 \leq p < \infty$*

Théorème 10. *L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Corollaire 3. *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

alors $f(x) = 0$ p.p dans Ω.

Preuve :
Soit $f \in L^2(\Omega)$, tel que :

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Etant donné que C_0^∞ est dense dans $L^2(\Omega)$, $\exists \phi_n \in C_0^\infty$ tel que $\|\phi_n - f\|_{L^2} \longrightarrow 0$. On a $\forall \phi_n \in C_0^\infty(\Omega)$

$$|\int_\Omega \phi_n(x)\phi(x)dx| = |\int_\Omega (\phi_n - f)(x)\phi(x)dx + \int_\Omega f(x)\phi(x)dx| \leq \|\phi_n - f\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{L^2(\Omega)}$$

Donc $\forall \phi_n \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega \phi_n(x)\phi(x) \longrightarrow 0$$

En prenant un ϕ particulier : $\phi = \phi_n$, on a :

$$\int_\Omega \phi_n^2(x) = \|\phi_n\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0$$

donc :

$$\|\phi_n - 0\|_{L^2} \longrightarrow 0$$

d'où $f \equiv_{L^2} 0$ donc $f \equiv 0$ presque partout ce qui termine la démonstration.

1.3 Dérivation faible

1.3.1 Définition

Définition 18. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $v \in L^2(\Omega)$. On dit que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe d fonctions $(\omega_i)_{i=1}^d \in (L^2(\Omega))^d$, telles que, $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ et $\forall i \in \{1, ..., d\}$,*

$$\int_\Omega v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega w_i(x) \phi(x) dx$$

Chaque w_i est appelée la $i - eme$ dérivée faible de v et est notée $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$.

Lemme 1. *Soit $v \in L^2(\Omega)$. S'il existe une constante $C > 0$ telle que, $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\forall i \in \{1, ..., d\}$,*

$$| \int_\Omega v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx | \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$$

alors v est dérivable au sens faible.

Définition 19. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $\sigma \in (L^2(\Omega))^d$. On dit que σ admet une divergence au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, telle que, $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$,*

$$\int_\Omega (\sigma(x), \nabla \phi(x)) dx = - \int_\Omega w(x) \phi(x) dx$$

La fonction w est appelée la divergence faible de σ et est notée $div(\sigma)$.

Lemme 2. *Soit $v \in L^2(\Omega)$. S'il existe une constante $C > 0$ telle que, $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$,*

$$| \int_\Omega (\sigma(x), \nabla \phi(x)) dx | \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$$

alors v admet une divergence au sens faible.

1.3.2 Résultats

Proposition 8. *Soit $v \in L^2(\Omega)$, dérivable au sens faible $L^2(\Omega)$ tel que $\forall i \in \{1, ..., n\}$ $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, dérivées partielles faibles soit nulles. Alors pour chaque composante connexe de Ω, il existe une constante C tel que $v(x) = C$ presque partout dans cette composante connexe.*

1.4 Espaces de Sobolev

1.4.1 Définition

Définition 20. *Pour tout entier $m \geq 1$, on appelle espace de Sobolev d'ordre m sur Ω l'espace*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

On le munit du produit scalaire

$$(u, v)_{n,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq n} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{n,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq n} \int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

On a plus généralement $\forall m \geq 0$ et $\forall p \in [1, \infty]$,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega), \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

avec α $N-uplet \in N^N$, $\partial^\alpha v = \frac{\partial^{\alpha_1} v}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2} v}{\partial x_2^{\alpha_2}} ... \frac{\partial^{\alpha_N} v}{\partial x_N^{\alpha_N}}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$.

Définition 21. *L'espace $H^n(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_{0,\Omega}$.*

Définition 22. *Pour $m \in N$ on note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérance de $D(\Omega) = C_0^\infty$ dans $H^m(\Omega)$.*

Définition 23. *On note $H^{k/2}(\Gamma^D)$, $k \geq 1$ l'espace défini par :*

$$H^{k/2}(\Gamma^D) = \{v \in L^2(\Gamma^D) | \exists w \in H^k(\Omega), \gamma_{\Gamma^D} w = v\}$$

Théorème 11. *L'espace $H^{1/2}(\Gamma^D)$ est un sous-espace dense de $L^2(\Gamma^D)$. Muni de la norme :*

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma^D)} = inf\{\|w\|_{H^1(\Omega)}, t.q. \gamma_\Gamma^D w = v\}$$

l'espace $H^{1/2}(\Gamma^D)$ est un espace de Hilbert.

1.4.2 Résultats de densités et continuités

Proposition 9. *Pour tout $m \in N$, l'espace $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^n)$. C'est à dire :*

$$H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$$

Proposition 10. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$.*

Définition 24. *Soit Ω borné. Alors $\exists C > 0$ tel que :*

$$\forall v \in H_0^n(\Omega), \quad \|v\|_{n-1,\Omega} \leq C|v|_{n,\Omega}$$

.

Définition 25. *Etant donné une fonction u définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On définit $\tilde{u}$ la fonction qui prolonge u par 0 sur $\Omega \setminus \mathbb{R}^n$.*

Proposition 11. *Si u est dans $H_0^m(\Omega)$ alors $\tilde{u}$ est dans $H^m(\mathbb{R}^n)$.*

Proposition 12. *Si $u \in W^{1,p}$ et $v \in W^{1,q}$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ alors $uv \in W^{1,r}$.*

Théorème 12. *Posons la décomposition suivante :*

$$\bar{\Omega} = \cup_{r=1}^R \bar{\Omega}_r$$

tel que :
- *Ω_r ouvert de $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}$, Γ_r assez régulière avec $1 \leq r \leq R$*
- *$\Omega_r \cap \Omega_s = \{0\}$ lorsque $r \neq s$*

Alors
1. *$v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tel que $\forall r$, $v_{|\Omega_r} \in H^1(\Omega_r)$, alors $v \in H^1(\Omega)$*
2. *$v \in C^1(\bar{\Omega})$ tel que $\forall r$, $v_{|\Omega_r} \in H^2(\Omega_r)$, alors $v \in H^2(\Omega)$*

1.4.3 Théorèmes et inégalités

Définition 26. *Un espace Ω est dit régulier s'il satisfait les trois conditions suivantes :*
- *Ω est fermé*
- *$\Gamma = \partial\Omega$, frontière de Ω est une variété $-C^1$ de dimension $N-1$: c'est à dire qu'on peut parametrer Γ par une application de $\mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^1.*
- *Ω est localement d'un seul côté de sa frontière.*

Theorème 13. ***(Rellich)*** *Soit Ω un ouvert borné régulier de frontière Γ assez régulière (C^1 par morceaux). Alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous suite convergente dans $L^2(\Omega)$ (convergence forte). On dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*

Si on suppose juste que Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ alors l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

Proposition 13. ***(Inégalité de Poincaré)*** *Soit $\Omega =]a, b[$,tel que $-\infty < a < b < \infty$. Il existe une costante $C_p(\Omega) > 0$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$ vérifiant $v(a) = 0$ ou $v(b) = 0$ on ait :*

$$\int_a^b |v(x)|^2 dx \leq C_p(\Omega) \int_a^b |v'(x)|^2 dx$$

Plus généralement, soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction et connexe. Alors il existe une constante $C(\Omega)$ telle que :

$$\forall u \in H_0^1, \qquad \|u\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \left(\sum_{j=0}^{n} \|\partial_j u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} = C(\Omega)\|\nabla u\|_{0,\Omega}$$

Encore plus général : Soit Ω un ouvert borné dans au moins une direction connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ, C^1 par morceaux, et Γ^D une partie de sa frontière de mesure non nulle. Soit $V = \{v \in H^1(\Omega) | v_{|\Gamma^D} = 0\}$. Alors il existe une constante $C(\Omega)$ telle que :

$$\forall u \in V, \qquad \|u\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \left(\sum_{j=0}^{n} \|\partial_j u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} = C(\Omega)\|\nabla u\|_{0,\Omega}$$

ou encore :

$$\forall u \in V, \qquad \|u\|_{1,\Omega} \leq (C^2(\Omega) + 1)\|\nabla u\|_{0,\Omega}$$

Preuve 1 :

On procède par densité. Soit $v \in D(\Omega)$, et $\tilde{v}$ le prolongement de v par 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. On a $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Etant donnée que l'on suppose Ω borné dans au moins une direction, prenons cette direction la $n-ième$ dimension de Ω : $x \in \Omega$ alors $a \leq x_n \leq b$ et $x = (x', x_n)$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Comme on a $\tilde{v}(x^{'}, a) = 0$, on écrit :

$$\tilde{v}(x', x_n) = \int_a^{x_n} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t) dt$$

ce qui donne avec Cauchy-Schwartz :

$$|\tilde{v}(x', x_n)|^2 \leq (x_n - a) \int_a^{x_n} |\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}|^2 (x', t) dt$$

donc :

$$|\tilde{v}(x', x_n)|^2 \leq (x_n - a) \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}|^2 (x', t) dt$$

En intégrant sur les $n-1$ dimensions non bornées à priori de l'espace cette dernière inégalité, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{v}(x', x_n)|^2 dx' \leq (x_n - a) \int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}|^2 (x) dx$$

Puis en intégrant sur la dernière dimension :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}(x)|^2 dx \leq \int_a^b (x_n - a) dx_n \|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}\|_{0,\mathbb{R}^n}^2$$

ou encore :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}\|_{0,\mathbb{R}^n}^2$$

On a démontré que $\forall v \in C_0^\infty$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla\|_{L^2(\Omega)}$$

Il faut étendre le résultat à tout v dans $H_0^1(\Omega)$. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, comme $D(\Omega)$ est dense dans H_0^1 alors $\exists \phi_n \in D(\Omega)$ tel que $\phi_n \to v$ en norme H^1. Ce qui veut dire que $\phi_n \to v$ en norme L^2 et $\nabla\phi_n \to \nabla v$ en norme L^2.

Or

$$\|\phi_n\| \leq \|\phi_n - v\|^2 + \|v\|^2$$

donc $\|\phi_n\| \to \|v\|$ en norme L^2 et de même $\|\nabla\phi_n\| \to \|\nabla v\|$ en norme L^2. d'où le résultat voulu :

$$\|v\|_{L^2} \leq C(\Omega)\|\nabla v\|_{L^2}$$

Preuve 2 :

On va utiliser le théorème de Rellich. Raisonnons par l'absurde : on veut démontrer que :

$$\exists C > 0, \forall v \in H_0^1 \quad \|v\|_{0,\Omega} \leq C|v|_{1,\Omega}$$

la négation de cette phrase mathématique est :

$$\forall A > 0, v_{(A)} \in H_0^1 \quad \|v_{(A)}\|_{0,\Omega} > A|v_{(A)}|_{1,\Omega}$$

Pour $A = n$ on a :

$$\forall n > 0, v_n \in H_0^1 \quad \|v_n\|_{0,\Omega} > n|v_n|_{1,\Omega}$$

On pose $w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{0,\Omega}}$ et donc $\|w_n\|_{0,\Omega} = 1$, et $|w_n|_{1,\Omega} = \frac{|v_n|_{1,\Omega}}{\|v_n\|_{0,\Omega}}$ ce qui donne :

$$\forall n > 0, \exists w_n \in H_0^1, \quad |w_n|_{1,\Omega} < \frac{1}{n}, et\ \|w_n\|_{0,\Omega} = 1$$

donc $\|w_n\|_{1,\Omega}^2 \leq (1 + \frac{1}{n^2}) \leq 2$, donc w_n est une suite bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

D'après Rellich, il existe une sous suite convergente dans L^2 $Z_n = w_\phi(n)$. On a donc :

$$\|\nabla Z_n\|_{0,\Omega} = |Z_n|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{n}$$

ce qui permet de dire que $\nabla Z_n \longrightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$. Sachant que l'on a aussi $Z_n \longrightarrow Z \in L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ on peut dire que $Z_n \longrightarrow Z \in H^1(\Omega)$.

Comme $\nabla Z = 0$, Z est constant sur chaque composante connexe de Ω. Or $Z \in H_0^1(\Omega)$, donc sur la composante connexe Ω, $Z \equiv 0$. Or $\|Z\|_{0,\Omega} = 1$ $\forall Z$ (convergence forte dans L^2)

Contradiction

ce qui termine la démonstration.

Proposition 14. ***(Inégalité de Poincaré-Wirtinger)*** *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante $C(\Omega)$ telle que :*

$$\forall u \in H^1, \qquad \|u - m(u)\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{0,\Omega}$$

avec

$$m(u) = \frac{\int_\Omega u(y)dy}{\int_\Omega dy}$$

Preuve :

On va utiliser le théorème de Rellich. Raisonnons par l'absurde : on veut démontrer que :

$$\exists C > 0, \forall v \in H^1 \quad \|v - m(v)\|_{0,\Omega} \leq C|v|_{1,\Omega}$$

la négation de cette phrase mathématique est :

$$\forall A > 0, \exists v_{(A)} \in H^1 \quad \|v_{(A)} - m(v_{(A)})\|_{0,\Omega} > A|v_{(A)}|_{1,\Omega}$$

Pour $A = n$ on a :

$$\forall n > 0, \exists v_n \in H^1 \quad \|v_n\|_{0,\Omega} > n|v_n|_{1,\Omega}$$

On pose $v_n := v_n - m(v_n)$ puis $w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{0,\Omega}}$ et donc $\|w_n\|_{0,\Omega} = 1$, et $|w_n|_{1,\Omega} = \frac{|v_n|_{1,\Omega}}{\|v_n\|_{0,\Omega}}$ ce qui donne :

$$\forall n > 0, \exists w_n \in H_0^1, \quad |w_n|_{1,\Omega} < \frac{1}{n}, et\ \|w_n\|_{0,\Omega} = 1$$

donc $\|w_n\|_{1,\Omega}^2 \leq (1 + \frac{1}{n^2}) \leq 2$, donc w_n est une suite bornée dans $H^1(\Omega)$.

D'après Rellich, il existe une sous suite convergente dans L^2 $Z_n = w_\phi(n)$. On a donc :

$$\|\nabla Z_n\|_{0,\Omega} = |Z_n|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{n}$$

ce qui permet de dire que $\nabla Z_n \longrightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$. Sachant que l'on a aussi $Z_n \longrightarrow Z \in L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ on peut dire que $Z_n \longrightarrow Z \in H^1(\Omega)$.

Comme $\nabla Z = 0$, Z est constant sur chaque composante connexe de Ω. Donc $Z = Cst$ puisque Ω connexe. On a $\|Z\|_{0,\Omega} = 1\ \forall Z$ (convergence forte dans L^2). Puis on a $m(Z_n) = \frac{m(v_n)}{\|v_n\|} = 0$. Or $Z = Cst$ donc $Cst = 0$ sachant que l'on a $\|Z\|_{0,\Omega} = 1$.

Contradiction

ce qui termine la démonstration.

Corollaire 4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, borné dans au moins une direction, alors la semi-norme*

$$|u|_{1,\Omega} = \left(\sum_{j=0}^{n} \|\partial_j u\|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|.\|_{1,\Omega}$

Preuve :
Soit $v \in H_0^1$, $|v|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{1,\Omega}$ par définition. En applicant Poincaré on a :

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = |v|_{1,\Omega}^2 + \|v\|_{1,\Omega}^2 \leq (1 + C_p^2)|v|_{1,\Omega}^2$$

ce qui prouve l'équivalence des normes.

Remarque : H_0^1 est un espace de Hilbert pour la norme induite $\|.\|_{1,\Omega}$, c'est donc un espace de Hilbert pour la norme $|.|_{1,\Omega}$.

Lemme 3. $\forall v \in H^1(]0,1[)$ *et* $\forall x, y \in [0,1]$ *on a :*

$$v(y) = v(x) + \int_x^y v'(s)ds$$

plus généralement,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \begin{array}{ccc} H^1(]0,1[) & \longrightarrow & R \\ v & \longmapsto & v(x) \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur $H^1(]0,1[)$

En particulier, en dimension 1, toute fonction de $H^1(]0,1[)$ admet un représentant continu sur $[0,1]$.

Théorème 14. *Soit Ω borné, alors l'injection canonique de $H^n(\Omega) \longrightarrow H^{n-1}(\Omega)$ est compacte.*

Théorème 15. *Soit $v \in H^1(a,b)$ alors $\exists C > 0$ tel que :*

$$v(x) \leq C\|v\|_{H^1(a,b)} \qquad \forall x \in [a,b]$$

1.5 Théorèmes de trace

Pour une fonction $v \in H^1$, qui n'est donc pas forcément continue, quel est le sens de $v_{|\Gamma}$ et de $\frac{\partial v}{\partial n}_{|\Gamma}$?
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\bar{\Omega}$ sa fermeture et $m \in N \cup \{\infty\}$. On introduit les notations suivantes :

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} | \exists \Omega_1 \in ouvert(\mathbb{R}^n), \bar{\Omega} \subset \Omega_1, \exists f_1 \in C^m(\Omega_1), t.q. f_{1|\bar{\Omega}} = f\}$$

$$C_0^m(\bar{\Omega}) = \{f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} | \exists \Omega_1 \in ouvert(\mathbb{R}^n), \bar{\Omega} \subset \Omega_1, \exists f_1 \in C_0^m(\Omega_1), t.q. f_{1|\bar{\Omega}} = f\}$$

1.5.1 Espace $\Omega = \mathbb{R}_+^n$

On pose ici :

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$$
$$\Gamma_{\mathbb{R}_+^n} = \partial \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times 0$$

Lemme 4. *L'espace $C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}_+^n})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}_+^n)$*

Etant donné que l'on peut parler de la trace d'une fonction v de $\in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}_+^n})$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, on définit $\gamma_0 v$ par :

$$\gamma_0(v)(x') = v(x', 0) \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

On a $\gamma_0(v) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. On a ensuite le lemme suivant :

Lemme 5. *Pour tout $v \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}_+^n})$:*

$$\|\gamma_0 v\|_{0,\mathbb{R}^{n-1}} \leq C\|v\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)}$$

Corollaire 5. *L'application $\gamma_0 : v \longrightarrow v(.,0) = \gamma_0 v$ est une application linéaire continue de $\in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}_+^n})$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ et γ_0 se prolonge en une application linéaire continue de $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ et on a :*
Pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$:

$$\|\gamma_0 v\|_{0,\mathbb{R}^{n-1}} \leq C\|v\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)}$$

Théorème 16. ***(Formule de Green** $\Omega = \mathbb{R}_+^n$**)** $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, et $\forall v \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ on a : $\forall i \in \{1, ..., N-1\}$*

$$(1) \qquad \int_{\mathbb{R}_+^n} v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = -\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \phi dx$$

$$(2) \qquad \int_{\mathbb{R}_+^n} v \frac{\partial \phi}{\partial x_N} dx = -\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial v}{\partial x_N} \phi dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(x', 0)\phi(x', 0) dx'$$

Proposition 15. *Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de classe C^m (ou $\Omega = \mathbb{R}_+^d$) alors $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*

1.5.2 Espace Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

Lemme 6. *L'espace $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$*

Théorème 17. *L'application $\gamma_0 : v \longrightarrow \gamma_0 v = v_{|\Gamma} \in C^\infty(\gamma)$ est une application linéaire continue de $\in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ dans $C^\infty(\Gamma)$ et γ_0 se prolonge en une application linéaire continue, notée γ_0 et nommé trace de v, de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ et on a :*
Pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$\|\gamma_0 v\|_{0,\Gamma} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Théorème 18. ***(Caractérisation de** $H_0^1(\Omega)$**)** Soit Ω ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$ et Γ assez régulière, alors :*

$$H_0^1(\Omega) = Ker(\gamma_0) = \{v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = v_{|\Gamma} = 0\}$$

Théorème 19. ***(Caractérisation de** $H^2(\Omega)$**)** Soit Ω ouvert borné, Γ assez régulière, alors :*

$$H_0^2(\Omega) = Ker(\gamma) = \{v \in H^2(\Omega), v_{|\Gamma} = \frac{\partial v}{\partial x}_{|\Gamma} = 0\}$$

Théorème 20. ***(Formule de Green)** Soit Ω un ouvert borné connexe et Γ assez régulière (C^1 par morceaux), et $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{1,q}(\Omega)$ alors $\forall i \in \{1, ..., N\}$:*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Gamma u v \nu_i$$

avec ν_i la $i-$ème composante du vecteur de la normale extérieure à Γ.

Théorème 21. ***(Formule de Green, cas*** H^1***)*** *Soit* Ω *un ouvert borné connexe et* Γ *assez régulière (*C^1 *par morceaux), alors* $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ *et* $\forall i \in \{1, ..., N\}$ *:*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Gamma u v \upsilon_i$$

avec υ_i *la* $i-$*ème composante du vecteur de la normale extérieure à* Γ*.*

Théorème 22. ***(Formule de Green, cas*** H^2***)*** *Soit* Ω *un ouvert borné connexe de* $\mathbb{R}^d$ *de frontière* Γ*,* C^1 *par morceaux. Alors* $\forall u \in H^2(\Omega)$*,* $\forall v \in H^1(\Omega)$*, on a :*

$$\int_\Omega \Delta u.v = -\int_\Omega (\nabla u.\nabla v) + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v$$

Remarque : Lorsque l'on écrit

$$\int_\Gamma uv$$

cela veut dire que l'on a :

$$\int_\Gamma \gamma_0(u)(x)\gamma_0(v)(x)d\sigma(x)$$

Théorème 23. ***(Relèvement)*** *Soit* Ω *un ouvert borné et régulier de* $\mathbb{R}^2$ *. Soit* Γ *une partie de* $\partial\Gamma$ *de mesure non nulle. Alors il existe une constante* $C_R(\Omega)$ *tel que :*

$$\forall g \in H^{1/2}(\partial\Omega), \exists u_g \in H^1(\Omega), \gamma(u_g) = g$$

et on a :

$$\|u_g\|_{H^1(\Omega)} \leq C_R(\Omega)\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

1.5.3 Notations et résultats

Si on se place dans $H^2(\Omega)$, avec Ω borné et Γ C^1 par morceaux. On note :

$$\gamma_0 v = v_{|\Gamma} \in L^2(\Gamma), \forall v \in H^2(\Omega)$$

De plus étant donné que $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^1$, alors $\gamma_0(\frac{\partial v}{\partial x_i})$ a un sens dans $L^2(\Gamma)$. On peut donc définir :

$$\gamma_1 v = \frac{\partial v}{\partial \nu_{|\Gamma}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \nu_{i|\Gamma} \in L^2(\Gamma)$$

où $\overrightarrow{\nu}$ est la normale extérieure à Γ.