Correction du TD 5 d'Analyse Numérique avec rappels des résultats

Cuvelier François

16 novembre 2007

Table des matières

Chapitre 1

Rappels

1.1 Espace vectoriel

Definition 1. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. un* ***espace vectoriel*** *sur $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide V dont les éléments sont appelés vecteurs muni d'une opération binaire appelée addition $+ : V \times V \to V$ et d'une multiplication scalaire $. : \mathbb{K} \times V \to V$ tel que $(V, +)$ est un groupe commutatif, i.e.,*

$$\forall x, y, z \in V, \quad (x + y) + z = x + (y + z),$$

$$\exists 0 \in V \text{ tel que } \forall x \in V, \quad x + 0 = x,$$

$$\forall x \in V, \ \exists -x \in V \text{ tel que } x + (-x) = 0,$$

$$\forall x, y \in V, \quad x + y = y + x$$

la multiplication scalaire satisfaisant $\forall x, y \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x,$$

$$\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y,$$

$$\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x,$$

$$1.x = x.$$

Definition 2. *Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ une application. On dit que φ est* ***bilinéaire*** *si et seulement si elle est linéaire en chacune de ses variables, c'est à dire : $\forall (x, x') \in E^2$, $\forall (y, y') \in F^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:*

$$\begin{aligned}
&\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \\
&\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y') \\
&\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y) \\
&\varphi(x, \lambda y) = \lambda\varphi(x, y)
\end{aligned}$$

Definition 3. *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Nous dirons qu'un sous-ensemble W de V est un* ***sous-espace*** *de V s'il est stable pour les opérations de V, c'est à dire si $\forall x, y \in W$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$*

$$x + y \in W$$

$$\alpha x \in W.$$

W est alors un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication scalaire héritée de V.

Definition 4. *Soient U et V deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et une application $L : U \to V$. Le* ***noyau*** *de L noté* $\ker L$ *est l'ensemble $\{u \in U$ tel que $L(u) = 0\}$. L'****image*** *de L noté $\mathrm{R}(L)$ est l'ensemble $\{L(u)$ tel que $u \in U\}$. Cette application est* ***linéaire*** *si*

$$\forall x, y \in U,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y).$$

1.2 Espaces vectoriels normés

Definition 5. *Une norme sur un espace vectoriel E est une application notée généralement $\|\|_E$ de E dans $\mathbb{R}$, possédant les propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{l} \|x\|_E \geqslant 0\ \forall x \in E \\ \|x\|_E = 0 \leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\|_E = \|\lambda\|\, \|x\|_E\ \ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} \\ \|x + y\|_E \leqslant \|x\|_E + \|Y\|_E \end{array}$$

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

Definition 6. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Definition 7. *Soit V un espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur V une forme bilinéaire $\langle u, v\rangle$ de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$, définie positive :*

$$\langle u, u\rangle \geqslant 0\ \forall u \in V \quad \text{et} \quad \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit V un espace vectoriel muni du produit scalaire $\langle ., .\rangle_V$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors vérifiée :*

$$|\langle u, v\rangle_V| \leqslant \langle u, u\rangle_V^{1/2} \langle v, v\rangle_V^{1/2} \quad \forall u, v \in V.$$

Definition 8. *On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, complet pour la norme associée.*

Théorème 2. *Un sous-espace vectoriel d'un espace complet est complet si et seulement si il est fermé.*

Corolaire 3. *Un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace complet est complet.*

1.3 espaces $L^p(\Omega)$

Definition 9. *On définit l'espace $L^p(\Omega)$ pour $1 \leqslant p < \infty$ comme étant l'espace des fonctions mesurables de puissance $p-$ème intégrable sur Ω.*
On définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables f essentiellement bornées sur Ω (i.e. $\exists C > 0$ telle que $|f(x)| < C$ presque partout dans Ω).

Théorème 4. *Muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\right)^{1/p},$$

l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf(C \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } |f(x)| < C \text{ p.p. dans } \Omega),$$

l'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

Théorème 5. *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ alors*

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega), \text{ pour } 1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$$

Théorème 6 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On désigne par p' l'exposant conjugué de p, défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Théorème 7. *$L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel et $\|.\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

1.4 Notations et résultats

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ dont la frontière Γ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit Γ^D et Γ^R deux partie complémentaires de Γ :

$$\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^R, \quad \Gamma^D \cap \Gamma^R = \varnothing.$$

1.4.1 Dérivation faible dans $L^2(\Omega)$

Definition 10. *On dit que deux fonctions mesurables sont égales **presque partout** s'il existe un ensemble $E \subset \Omega$ tel que la mesure de Lebesgue de E est nulle et $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \Omega \backslash E$.*

Definition 11. *On note $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (ou $\mathcal{D}(\Omega)$) l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω.*

Théorème 8. *L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$ il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{1.4.1}$$

Corolaire 9. *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \tag{1.4.2}$$

alors $f(x) = 0$ presque partout dans Ω.

Definition 12. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $v \in L^2(\Omega)$. On dit que v est **dérivale au sens faible** dans $L^2(\Omega)$ s'il existe d fonctions $(w_i)_{i=1}^d \in (L^2(\Omega))^d$, telles que, , $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$,*

$$\int_\Omega v(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega w_i(x)\varphi(x)dx. \tag{1.4.3}$$

Chaque w_i est appelée la $i-$ème dérivée faible de v et notée désormais $\frac{\partial v}{\partial x_i}$.

Lemma 1. *Soit $v \in L^2(\Omega)$. S'il existe une constante $C > 0$ telle que, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$,*

$$\left|\int_\Omega v(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx\right| \leqslant C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.4.4}$$

alors v est dérivable au sens faible.

Definition 13. *Soit* $\boldsymbol{\sigma} \in (L^2(\Omega))^d$. *On dit que* $\boldsymbol{\sigma}$ *admet une* ***divergence au sens faible*** *dans* $L^2(\Omega)$ *s'il existe une fonction* $w \in L^2(\Omega)$ *telle que,* $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \langle \boldsymbol{\sigma}(x), \boldsymbol{\nabla}\, \varphi(x) \rangle \, dx = -\int_\Omega w(x)\varphi(x) dx. \tag{1.4.5}$$

La fonction w *est appelée divergence faible de* $\boldsymbol{\sigma}$ *et notée désormais* $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$.

Lemma 2. *Soit* $\boldsymbol{\sigma} \in (L^2(\Omega))^d$. *S'il existe une constante* $C > 0$ *telle que,* $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\left| \int_\Omega \langle \boldsymbol{\sigma}(x), \boldsymbol{\nabla}\, \varphi(x) \rangle \, dx \right| \leqslant C \left\| \varphi \right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.4.6}$$

alors $\boldsymbol{\sigma}$ *admet une divergence au sens faible.*

1.4.2 Espaces de Sobolev

Definition 14. *Pour tout entier* $m \geqslant 1$, *on appelle espace de Sobolev d'ordre* m *sur* Ω *l'espace*

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), \ |\alpha| \leqslant m \right\}. \tag{1.4.7}$$

Plus généralement, on note $W^{m,p}(\Omega)$ *l'espace défini pour tout entier* $m \geqslant 0$ *et* $p \in [\![1, \infty]\!]$ *par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ v \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), \ |\alpha| \leqslant m \}. \tag{1.4.8}$$

Théorème 10. *Muni du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx \tag{1.4.9}$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \langle u, u \rangle_{H^m(\Omega)}^{1/2} \tag{1.4.10}$$

l'espace $H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Théorème 11 (Produit [?, Page 35])**.** *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$ *et* $(p, q, r) \in [\![1, \infty]\!]^3$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) & \to & W^{1,r}(\Omega) \\ (u, v) & \mapsto & uv \end{array} \tag{1.4.11}$$

est bien définie, bilinéaire continue et on a, $\forall (u, v) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ *et* $\forall i \in [\![1, d]\!]$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}. \tag{1.4.12}$$

Résultats en dimension $d = 1$

Soit $\Omega =]a; b[$, $-\infty < a < b < \infty$.

Lemma 3. *Pour toute fonction* $v \in H^1(a, b)$ *et pour tout* $x, y \in [a; b]$, *on a*

$$v(y) = v(x) + \int_x^y v'(s) ds. \tag{1.4.13}$$

Plus généralement, pour tout $x \in [a; b]$, *l'application* $v \to v(x)$, *définie de* $H^1(a, b)$ *dans* $\mathbb{R}$, *est une forme linéaire continue sur* $H^1(a, b)$. *En particulier, toute fonction* $v \in H^1(a, b)$ *est continue sur* $[a; b]$ *et il existe une constante* $C(\Omega) > 0$ *telle que* $\forall v \in H^1(a, b)$

$$|v(x)| \leqslant C(\Omega) \left\| v \right\|_{H^1(a,b)}, \ \forall x \in [a; b] \tag{1.4.14}$$

Proposition 1 (Inégalité de Poincaré). *Soit $\Omega =]a;b[$, $-\infty < a < b < \infty$. Il existe une constante $C_P(\Omega) > 0$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$ vérifiant $v(a) = 0$ ou $v(b) = 0$ on ai*

$$\int_a^b |v(x)|^2 dx \leqslant C_P(\Omega) \int_a^b |v'(x)|^2 dx. \tag{1.4.15}$$

Théorème 12 (de trace). *Soit $\Omega =]a;b[$, $-\infty < a < b < \infty$. Les applications **traces***

$$\begin{array}{cccc} \gamma_a & : & H^1(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ & & v & \mapsto & v(a) \end{array}, \tag{1.4.16}$$

$$\begin{array}{cccc} \gamma_b & : & H^1(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ & & v & \mapsto & v(b) \end{array} \tag{1.4.17}$$

et

$$\begin{array}{cccc} \gamma_0 & : & H^1(a,b) & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & v & \mapsto & (v(a), v(b)) \end{array} \tag{1.4.18}$$

sont des applications linéaires continues. En particulier, il existe une constante $C_c(\Omega) > 0$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$|\gamma_a(v)| \leqslant C_c(\Omega) \|v\|_{H^1(a,b)}, \tag{1.4.19}$$

$$|\gamma_b(v)| \leqslant C_c(\Omega) \|v\|_{H^1(a,b)} \tag{1.4.20}$$

et

$$|\gamma_0(v)| = (v(a)^2 + v(b)^2)^{1/2} \leqslant \sqrt{2} C_c(\Omega) \|v\|_{H^1(a,b)}. \tag{1.4.21}$$

Théorème 13. *Si $u, v \in H^1(a;b)$ alors*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = -\int_a^b u(x)v'(x)dx + \left[u(x)v(x)\right]_a^b \tag{1.4.22}$$

Si $u \in H^2(a;b)$ et $v \in H^1(a;b)$ alors

$$\int_a^b u''(x)v(x)dx = -\int_a^b u'(x)v'(x)dx + \left[u'(x)v(x)\right]_a^b \tag{1.4.23}$$

Résultats en dimension d

Théorème 14. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ dont la frontière Γ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, si $m > \frac{d}{2}$, l'espace $H^m(\Omega)$ est un sous-espace de $\mathcal{C}_0(\bar{\Omega})$ et l'injection canonique de $H^m(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_0(\bar{\Omega})$ est continue.*

[**?**, Page 90]

Théorème 15. *[**?**, Page 90]Si Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^m$, ou bien si $\Omega = \mathbb{R}^d_+$, alors $\mathcal{C}^\infty_c(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$*

Théorème 16 (Théorème de trace). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ dont la frontière Γ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors l'application trace γ_Γ définie par*

$$\begin{array}{cccc} \gamma_\Gamma & : & H^1(\Omega) & \to & L^2(\Gamma) \\ & & v & \mapsto & \gamma_\Gamma(v) = v_{|\Gamma} \end{array} \tag{1.4.24}$$

est une application linéaire continue. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\|\gamma_\Gamma(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.4.25}$$

Plus généralement, on

Théorème 17 (Théorème de trace)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ dont la frontière Γ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors les applications traces γ_Γ définies pour $p \in [\![1, \infty[\![$ par*

$$\begin{array}{cccc} \gamma_\Gamma & : & W^{1,p}(\Omega) & \to & L^p(\Gamma) \\ & & v & \mapsto & \gamma_\Gamma(v) = v_{|\Gamma} \end{array} \tag{1.4.26}$$

et pour $p = \infty$ par

$$\begin{array}{cccc} \gamma_\Gamma & : & W^{1,\infty}(\Omega) & \to & C^{0,1}\Gamma \\ & & v & \mapsto & \gamma_\Gamma(v) = v_{|\Gamma} \end{array} \tag{1.4.27}$$

sont linéaires continues.

Théorème 18 (Théorème de trace)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ dont la frontière Γ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit Γ^D et Γ^R deux parties complémentaires de Γ :*

$$\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^R, \quad \Gamma^D \cap \Gamma^R = \varnothing,$$

avec $\mathrm{mes}(\Gamma^D) > 0$.
Alors, l'application trace γ_{Γ^D} définie par

$$\begin{array}{cccc} \gamma_{\Gamma^D} & : & H^1(\Omega) & \to & L^2(\Gamma^D) \\ & & v & \mapsto & \gamma_{\Gamma^D}(v) = v_{|\Gamma^D} \end{array} \tag{1.4.28}$$

est une application linéaire continue. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\|\gamma_{\Gamma^D}(v)\|_{L^2(\Gamma^D)} \leqslant C \|v\|_{H^1(\Omega)} . \tag{1.4.29}$$

Definition 15. *On note $H^{k/2}(\Gamma^D)$, $k \geqslant 1$ l'espace défini par*

$$H^{k/2}(\Gamma^D) = \left\{ v \in L^2(\Gamma^D) \mid \exists w \in H^k(\Omega) \quad \textit{tel que} \quad \gamma_{\Gamma^D} w = v. \right\} \tag{1.4.30}$$

Théorème 19 ([?, Page 94])**.** *L'espace $H^{1/2}(\Gamma^D)$ est un sous-espace dense de $L^2(\Gamma^D)$. Muni de la norme*

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma^D)} = \inf \left\{ \|w\|_{H^1(\Omega)} \quad \textit{tel que} \quad \gamma_{\Gamma^D} w = v. \right\} \tag{1.4.31}$$

c'est un espace de Banach (et même un espace de Hilbert).

Théorème 20 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et Γ^D une partie de sa frontière telle que* $\mathrm{mes}(\Gamma^D) > 0$. *Soit V défini par*

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \ \textit{sur} \ \Gamma^D \right\}.$$

Alors V muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert et il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.4.32}$$

et

$$\forall v \in V, \quad \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant (C^2_\Omega + 1) \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{1.4.33}$$

Théorème 21 (Formule de Green)**.** *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $p, q \in [\![1, \infty]\!]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{1,q}(\Omega)$ alors $\forall i \in [\![1, d]\!]$ on a*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u v n_i d\sigma, \tag{1.4.34}$$

où n_i est la $i-$ème composante du vecteur $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^d$, normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω.

Théorème 22 (Formule de Green)**.** *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, $\forall u, v \in H^1(\Omega)$, $\forall i \in \{1, \dots, d\}$,*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u v n_i d\sigma, \tag{1.4.35}$$

où n_i est la $i-$ème composante du vecteur $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^d$, normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω.

Théorème 23 (Formule de Green)**.** *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, $\forall u \in H^2(\Omega)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$,*

$$-\int_\Omega (\Delta u) v dx = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma. \tag{1.4.36}$$

Théorème 24. *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, $\forall \boldsymbol{b} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^d$ et $\forall v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\nabla}\, v\rangle\, v = \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{b}) v^2 - \frac{1}{2}\int_\Gamma \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}\rangle\, v^2 \tag{1.4.37}$$

1.4.3 Résultats généraux

Théorème 25 (Théorème de Lax-Milgram)**.** *On suppose*

1. *V un espace de Hilbert sur R de norme $\|.\|_V$.*
2. *$\mathcal{L}$ est une application linéaire de V à valeurs réelles.*
3. *$\mathcal{L}$ est une application continue sur V, c'est à dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall v \in V, \quad |\mathcal{L}(v)| \leqslant C \|v\|_V. \tag{1.4.38}$$

4. *$\mathcal{A}$ est une application bilinéaire de $V \times V$ à valeurs réelles.*
5. *$\mathcal{A}$ est une application continue sur $V \times V$, c'est à dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\forall u, v \in V, \quad |\mathcal{A}(u, v)| \leqslant M \|u\|_V \|v\|_V. \tag{1.4.39}$$

6. *$\mathcal{A}$ est V-elliptique (coercive sur $V \times V$), c'est à dire qu'il existe une constante $\nu > 0$ telle que*

$$\forall v \in V, \quad \mathcal{A}(v, v)| \geqslant \nu \|v\|_V^2. \tag{1.4.40}$$

Alors, le problème variationnel

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \; u \in V \; \text{ tel que} \\ \qquad \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v), \;\; \forall v \in V \end{array}\right. \tag{1.4.41}$$

admet une unique solution.

Definition 16 (problème de Galerkin)**.** *Soit V un espace de Hilbert réel et V_h un sous-espace de dimension finie. L'approximation interne ou le problème de Galerkin associé à (1.4.41) est défini par*

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h, \text{ tel que} \\ \quad \mathcal{A}(u_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h), \;\; \forall v_h \in V_h. \end{array}\right. \tag{1.4.42}$$

Lemma 4. *Sous les hypothèses du théorème 25 de Lax-Milgram , le problème de Galerkin (1.4.42) admet une unique solution. Cette solution peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive.*

Lemma 5 (de Céa)**.** *Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram 25, la solution u de (1.4.41) et la solution u_h de (1.4.42) vérifient*

$$\|u - u_h\|_V \leqslant \frac{M}{\nu} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V . \tag{1.4.43}$$

Si, de plus, $\mathcal{A}$ est symétrique, alors on a

$$\|u - u_h\|_V \leqslant \sqrt{\frac{M}{\nu}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V . \tag{1.4.44}$$

Lemma 6. *Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram* **??***, et en supposant q'il existe un sous-espace $\mathcal{V} \subset V$ dense dans V et une application r_h de $\mathcal{V}$ dans V_h (appelée opérateur d'interpolation) tels que*

$$\lim_{h \to 0} \|v - r_h(v)\|_V = 0 \ \forall v \in \mathcal{V}. \tag{1.4.45}$$

*Alors la méthode d'approximation variationnelle interne converge, c'est à dire si u est la solution de (***??***) et u_h la solution de (***??***)*

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_V = 0. \tag{1.4.46}$$

Chapitre 2

Correction TD 5

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ dont la frontière Γ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit Γ^D et Γ^R deux partie complémentaires de Γ :

$$\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^R, \quad \Gamma^D \cap \Gamma^R = \emptyset.$$

2.1 Exercice 1

Exercice 1

On note $\boldsymbol{n}$ désigne la normale à Γ orientée vers l'extérieur de Ω.

Q. 1. *Montrer que* $\forall u \in H^2(\Omega)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$, *et* $\forall i,j \in \{1,\dots,d\}$ $\mathbb{M}_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$

$$\begin{array}{c} \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbb{M}\boldsymbol{\nabla} u)(\vec{\boldsymbol{x}})v(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) \\ = \\ -\int_\Omega \langle(\mathbb{M}\boldsymbol{\nabla} u)(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{\nabla} v(\vec{\boldsymbol{x}})\rangle\, d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) + \int_\Gamma \langle(\mathbb{M}\boldsymbol{\nabla} u)(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{n}(\vec{\boldsymbol{x}})\rangle\, v(\vec{\boldsymbol{x}})d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}), \end{array} \tag{1}$$

Q. 2. *Montrer que* $\forall \boldsymbol{b} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^d$, $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \langle \boldsymbol{b}(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{\nabla} v(\vec{\boldsymbol{x}})\rangle\, v(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{b}(\vec{\boldsymbol{x}}))v^2(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) + \frac{1}{2}\int_\Gamma \langle \boldsymbol{b}(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{n}(\vec{\boldsymbol{x}})\rangle\, v^2(\vec{\boldsymbol{x}})d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}) \tag{2}$$

Correction

Q. 1: Comme $u \in H^2(\Omega)$, on a, pour $j \in [\![1,d]\!]$, $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in W^{1,2}(\Omega)$. En utilisant le théorème 11(page 8), avec $p = q = 2$ et $r = 1$, pour $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in W^{1,2}(\Omega)$ et $\mathbb{M}_{i,j} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ on obtient

$$\forall i,j \in [\![1,d]\!] \quad \mathbb{M}_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j} \in W^{1,2}(\Omega).$$

On est alors sous les hypothèses du théorème 21(page 10) et on a, $\forall i,j \in [\![1,d]\!]$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbb{M}_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} &= \int_\Gamma \gamma\left(\mathbb{M}_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\gamma(v)n_i - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbb{M}_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)v \\ &= \int_\Gamma \mathbb{M}_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}vn_i - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbb{M}_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)v \end{aligned}$$

En sommant sur i et j on obtient (1).

Q. 2: On applique le théorème 11(page 8) avec $p = q = 2$ et $r = 1$. On a donc $v^2 = v \times v \in W^{1,1}(\Omega)$ et

$$\frac{\partial v^2}{\partial x_i} = 2v\frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i \in [\![1, d]\!].$$

Comme pour $i \in [\![1, d]\!]$, $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $v^2 \in W^{1,1}(\Omega)$, on peut appliquer le théorème 21(page 10) pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial b_i}{\partial x_i} v^2 &= \int_\Gamma \gamma(b_i)\gamma(v^2)n_i - \int_\Omega b_i \frac{\partial}{\partial x_i}(v^2) \\ &= \int_\Gamma b_i n_i v^2 - 2\int_\Omega b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} v\end{aligned}$$

En sommant sur i on obtient (2).

$\Diamond$

2.2 Exercice 2

Exercice 2

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma^R)$. On défini l'application $\mathcal{L}_f^g$ de $H^1(\Omega)$ à valeurs réelles par

$$\mathcal{L}_f^g(v) = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma^R} gv. \tag{1}$$

Q. 1. *Montrer que l'application $\mathcal{L}_f^g$ est linéaire continue.*

Correction

Q. 1: La linéarité de $\mathcal{L}_f^g$ est immédiate par linéarité de l'intégrale. Pour démontrer la continuité, il suffit alors de montrer qu'il existe une constante $C_\mathcal{L} > 0$ telle que

$$|\mathcal{L}_f^g(v)| \leqslant C_\mathcal{L} \|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{2}$$

On a, $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$|\mathcal{L}_f^g(v)| \leqslant \left|\int_\Omega fv\right| + \left|\int_{\Gamma^R} gv\right|$$

Comme f et v sont dans $L^2(\Omega)$, on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_\Omega fv\right| = \left|\langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $v \in H^1(\Omega)$, on a alors

$$\left|\int_\Omega fv\right| \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{3}$$

De plus

$$\left|\int_{\Gamma^R} gv\right| = \left|\int_{\Gamma^R} g\gamma_{\Gamma^R}(v)\right|$$

et d'après le théorème de trace 18(page 10), on a $\gamma_{\Gamma^R}(v) \in L^2(\Gamma^R)$. On peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_{\Gamma^R} gv\right| \leqslant \|g\|_{L^2(\Gamma^R)} \|\gamma_{\Gamma^R}(v)\|_{L^2(\Gamma^R)}.$$

De part la continuité de l'application linéaire γ_{Γ^R}, il existe une constante $C_\gamma > 0$ telle que

$$\left|\int_{\Gamma^R} gv\right| \leqslant C_\gamma \|g\|_{L^2(\Gamma^R)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4}$$

Au final, en utilisant (3) et (4), nous obtenons (2) avec $C_{\mathcal{L}} = \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_\gamma \|g\|_{L^2(\Gamma^R)}$.

$\Diamond$

2.3 Exercice 3

EXERCICE 3

Soit V un sous-espace de $H^1(\Omega)$ tel que

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega).$$

On note $\mathcal{A}$ l'application de $V \times V$ à valeurs réelles définie par

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},a_0}(u,v) &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \mathbb{M}_{i,j}(\vec{\boldsymbol{x}}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\vec{\boldsymbol{x}}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\vec{\boldsymbol{x}}) d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) \\
&\quad - \int_\Omega \sum_{i=1}^d (p_i(\vec{\boldsymbol{x}}) v(\vec{\boldsymbol{x}}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{\boldsymbol{x}}) - q_i(\vec{\boldsymbol{x}}) u(\vec{\boldsymbol{x}}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\vec{\boldsymbol{x}}) d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) \\
&\quad + \int_\Omega a_0(\vec{\boldsymbol{x}}) u(\vec{\boldsymbol{x}}) v(\vec{\boldsymbol{x}}) d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) + \int_\Gamma \mu(x) u(\vec{\boldsymbol{x}}) v(\vec{\boldsymbol{x}}) d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}})
\end{aligned} \tag{1}$$

où $\forall i,j \in \{1,\ldots,d\}$ $\mathbb{M}_{i,j}, p_i, q_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\mu \in L^\infty(\Gamma)$.
Pour simplifier les notations, on pose $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},a_0}$.

Q. 1. *Montrer que pour $V = H^1(\Omega)$, l'application $\mathcal{A}$ est bilinéaire continue.*

Pour la suite, on suppose que $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in (H_0^1(\Omega))^d$,

$$\exists \beta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{1}{2}\operatorname{div}(\boldsymbol{p}(\vec{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{q}(\vec{\boldsymbol{x}})) + a_0(\vec{\boldsymbol{x}}) \geqslant \beta \text{ pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Omega \tag{2}$$

et

$$\exists \alpha > 0,\ \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d,\ \langle \mathbb{M}(\vec{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}\rangle \geqslant \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \text{ pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Omega. \tag{3}$$

Q. 2. *Montrer que $\forall u \in H^1(\Omega)$,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},a_0}(u,u) &= \int_\Omega \langle \mathbb{M}\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} u\rangle + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\operatorname{div}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) + a_0\right) u^2 \\
&\quad + \int_\Gamma \left(\mu - \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{n}\rangle\right) u^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega)
\end{aligned} \tag{4}$$

Q. 3. *Montrer que pour $V = H_0^1(\Omega)$ l'application $\mathcal{A}$ est coercive si*

$$\beta > -\frac{\alpha}{C_p^2(\Omega)} \tag{5}$$

où $C_p(\Omega)$ est la constante de Poincaré :

$$\int_\Omega v^2(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) \leqslant C_p^2(\Omega)\int_\Omega |\boldsymbol{\nabla}\, v(\vec{\boldsymbol{x}})|^2 d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}),\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Q. 4. *Montrer que pour $V = H^1(\Omega)$ l'application $\mathcal{A}$ est coercive si*

$$\beta > 0 \tag{6}$$

et

$$\mu(\vec{\boldsymbol{x}}) - \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{p}(\vec{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{q}(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{n}(\vec{\boldsymbol{x}})\rangle \geqslant \nu \geqslant 0 \quad \textit{pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Gamma. \tag{7}$$

Q. 5. *Montrer que pour $V = H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega) \mid v_{\Gamma^D} = 0\right\}$, l'application $\mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},a_0}$ est coercive si*

$$\beta > -\frac{\alpha}{C_p^2(\Omega)} \tag{8}$$

et

$$\mu(\vec{\boldsymbol{x}}) - \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{p}(\vec{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{q}(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{n}(\vec{\boldsymbol{x}})\rangle \geqslant \nu \geqslant 0 \quad \textit{pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Gamma^R. \tag{9}$$

Correction

Q. 1: La bilinéarité de $\mathcal{A}$ est immédiate par linéarité de l'intégrale, de l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$, ...
Pour démontrer la continuité, il suffit d'établir qu'il existe une constante $C_{\mathcal{A}} > 0$ telle que

$$|\mathcal{A}(u,v)| \leqslant C_{\mathcal{A}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \forall u \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega). \tag{10}$$

Soient $u, v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(u,v)| \quad \leqslant \quad & \left|\int_\Omega \langle \mathbb{M}\boldsymbol{\nabla}\, u, \boldsymbol{\nabla}\, v\rangle\right| + \left|\int_\Omega a_0 uv\right| \\ & + \left|\int_\Omega v\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nabla}\, u\rangle\right| + \left|\int_\Omega \langle \boldsymbol{\nabla}\, v, \boldsymbol{q}\rangle u\right| + \left|\int_\Gamma \mu uv\right|. \end{aligned}$$

On étudie chacun des termes dans l'inégalité.

- Majoration du terme en a_0 :

$$\left|\int_\Omega a_0 uv\right| \leqslant \int_\Omega |a_0 uv|.$$

Comme $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, on a, d'après le théorème 6(page 7), $uv \in L^1(\Omega)$. De plus $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, l'inégalité de Hölder donne alors

$$\int_\Omega |a_0 uv| \leqslant \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|uv\|_{L^1(\Omega)}.$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Hölder à $\|uv\|_{L^1(\Omega)}$, donne

$$\int_\Omega |a_0 uv| \leqslant \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant (??), on obtient

$$\left|\int_\Omega a_0 uv\right| \leqslant \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{11}$$

- Majoration du terme en $\mathbb{M}$:

$$\left|\int_\Omega \langle \mathbb{M}\,\boldsymbol{\nabla}\, u, \boldsymbol{\nabla}\, v\rangle\right| \leqslant \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\left|\int_\Omega \mathbb{M}_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|$$

Comme pour $i, j \in \llbracket 1, d\rrbracket$, $\mathbb{M}_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ et $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, on a, d'après le théorème 6(page 7), $\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$ et l'inégalité de Hölder donne

$$\left|\int_\Omega \langle \mathbb{M}\,\boldsymbol{\nabla}\, u, \boldsymbol{\nabla}\, v\rangle\right| \leqslant \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\|\mathbb{M}_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Notons $C_{\mathbb{M}} = \max_{i,j\in\llbracket 1,d\rrbracket}\|\mathbb{M}_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}$. Par application de l'inégalité de Hölder à $\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\Omega)}$, on obtient

$$\left|\int_\Omega \langle \mathbb{M}\,\boldsymbol{\nabla}\, u, \boldsymbol{\nabla}\, v\rangle\right| \leqslant C_{\mathbb{M}}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

Or, par propriété de la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$, on a

$$\forall u \in H^1(\Omega),\ \ \forall j \in \llbracket 1, d\rrbracket,\ \ \left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H^1(\Omega)} \tag{12}$$

ce qui donne

$$\left|\int_\Omega \langle \mathbb{M}\,\boldsymbol{\nabla}\, u, \boldsymbol{\nabla}\, v\rangle\right| \leqslant d^2 C_{\mathbb{M}}\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{13}$$

- Majoration du terme en $\boldsymbol{p}$:

$$\left|\int_\Omega u\,\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nabla}\, v\rangle\right| \leqslant \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega\left|\boldsymbol{p}_i\frac{\partial v}{\partial x_i}u\right|$$

Comme pour $i \in \llbracket 1, d\rrbracket$, $\boldsymbol{p}_i \in L^\infty(\Omega)$, $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, on a, d'après le théorème 6(page 7), $u\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$ et l'inégalité de Hölder donne

$$\left|\int_\Omega u\,\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nabla}\, v\rangle\right| \leqslant \sum_{i=1}^{d}\|\boldsymbol{p}_i\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Notons $C_{\boldsymbol{p}} = \max_{i\in\llbracket 1,d\rrbracket}\|\boldsymbol{p}_i\|_{L^\infty(\Omega)}$. Par application de l'inégalité de Hölder à $\left\|u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\Omega)}$, on obtient

$$\left|\int_\Omega u\,\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nabla}\, v\rangle\right| \leqslant C_{\boldsymbol{p}}\sum_{i=1}^{d}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

En appliquant (12) et en utilisant $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H^1(\Omega)}$, on a

$$\left| \int_\Omega u \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nabla} v\rangle \right| \leqslant dC_{\boldsymbol{p}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{14}$$

- Majoration du terme en $\boldsymbol{q}$:
Comme pour $i \in [\![1, d]\!]$, $\boldsymbol{q}_i \in L^\infty(\Omega)$, on a aussi

$$\left| \int_\Omega v \langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\nabla} u\rangle \right| \leqslant dC_{\boldsymbol{q}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{15}$$

avec $C_{\boldsymbol{q}} = \max\limits_{i\in[\![1,d]\!]} \|\boldsymbol{q}_i\|_{L^\infty(\Omega)}$.
- Majoration du terme en μ :
On a, par définition de l'application trace γ_Γ (1.4.24 page 9)

$$\begin{aligned} \left| \int_\Gamma \mu uv \right| &= \left| \int_\Gamma \mu\gamma_\Gamma(u)\gamma_\Gamma(v) \right| \\ &\leqslant \int_\Gamma |\mu\gamma_\Gamma(u)\gamma_\Gamma(v)| \end{aligned}$$

Comme $\gamma_\Gamma(u)$ et $\gamma_\Gamma(v)$ sont dans $L^2(\Gamma)$, d'après le théorème 6(page 7), $\gamma_\Gamma(u)\gamma_\Gamma(v) \in L^1(\Gamma)$. De plus $\mu \in L^\infty(\Gamma)$, on peut donc appliquer l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\left| \int_\Gamma \mu uv \right| \leqslant \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\gamma_\Gamma(u)\gamma_\Gamma(v)\|_{L^1(\Gamma)}.$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Hölder à $\|\gamma_\Gamma(u)\gamma_\Gamma(v)\|_{L^1(\Gamma)}$ donne

$$\left| \int_\Gamma \mu uv \right| \leqslant \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\gamma_\Gamma(u)\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma_\Gamma(v)\|_{L^2(\Gamma)}.$$

D'après le théorème de trace 16, il existe une constante $C_\gamma > 0$ telle que

$$\forall w \in H^1(\Omega),\ \ \|\gamma_\Gamma(w)\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C_\gamma \|w\|_{H^1(\Omega)}.$$

On obtient alors

$$\left| \int_\Gamma \mu uv \right| \leqslant C_\gamma^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{16}$$

En regroupant les inégalités (11), (13), (14, (15) et (16), on obtient (10) avec

$$C_{\mathcal{A}} = \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} + d^2 C_{\mathbb{M}} + d(C_{\boldsymbol{p}} + C_{\boldsymbol{q}}) + C_\gamma^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma)} > 0.$$

Q. 2: Soit $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\mathcal{A}(u,u) = \int_\Omega \langle \mathbb{M}\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} u\rangle + \int_\Omega a_0 u^2 - \int_\Omega u \langle \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\nabla} u\rangle + \int_\Gamma \mu u^2.$$

Comme $(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \in (W^{1,\infty}(\Omega))^d$ et $u \in H^1(\Omega)$, on obtient en utilisant la formule (2) de l'exercice 1

$$\int_\Omega \langle \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\nabla} u\rangle u = -\frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) u^2 + \frac{1}{2}\int_\Gamma \langle \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, \boldsymbol{n}\rangle u^2$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u,u) &= \int_\Omega \langle \mathbb{M}\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} u\rangle + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\operatorname{div}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) + a_0\right) u^2 \\ &+ \int_\Gamma \left(\mu - \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{n}\rangle\right) u^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega)\end{aligned}$$

Q. 3: Par hypothèse, $V = H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. On a alors,d'après (4), $\forall u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\mathcal{A}(u,u) = \int_\Omega \langle \mathbb{M}\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} u\rangle + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\operatorname{div}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) + a_0\right) u^2.$$

En utilisant les hypothèses (2) et (3), on obtient

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \alpha \|\boldsymbol{\nabla} u\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Si $\beta > 0$ on obtient directement

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \min(\alpha,\beta) \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

On suppose maintenant que $\beta \leqslant 0$. Comme $u \in H_0^1(\Omega)$ on peut utiliser l'inégalité de Poincaré (1.4.32 page 10) pour obtenir

$$\beta \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geqslant \beta C_p(\Omega)^2 \|\boldsymbol{\nabla} u\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{17}$$

et donc

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant (\alpha + \beta C_p^2(\Omega)) \|\boldsymbol{\nabla} u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

La condition (2) (i.e. $\alpha + \beta C_p^2(\Omega) > 0$) permet alors d'utiliser l'inégalité (1.4.33 page 10) pour obtenir

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \frac{\alpha + \beta C_p^2(\Omega)}{C_p^2(\Omega)+1} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Q. 4: Par hypothèse, $V = H^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. La relation (4) est toujours valable. En utilisant les hypothèses (2), (3) et (7), on obtient

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \alpha \|\boldsymbol{\nabla} u\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu \|u\|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

Si $\beta > 0$ et $\nu \geqslant 0$ on obtient directement

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \min(\alpha,\beta) \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Remarque 1. *On peut améliorer le résultat en prenant $\beta > 0$ et $\nu < 0$,*
Par continuité de l'application linéaire trace sur Γ, (voir théorème 16) il existe $C_\Gamma > 0$ telle que

$$|\gamma(u)| \leqslant C_\Gamma \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ce qui entraine

$$\|u\|^2_{L^2(\Gamma)} \leqslant C_\Gamma^2 |\Gamma| \, \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

et donc

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \left(\min(\alpha,\beta) + \nu C_\Gamma^2 |\Gamma|\right) \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

On obtient la coercivité si $\min(\alpha,\beta) + \nu C_\Gamma^2|\Gamma| > 0$, c'est à dire si

$$\nu > -\frac{\min(\alpha,\beta)}{C_\Gamma^2|\Gamma|}.$$

Q. 5: Par hypothèse, $V = H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$. La relation (4) est toujours valable. En utilisant (2), (3) et (9), on obtient

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \alpha \left\|\nabla u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta \left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu \left\|u\right\|^2_{L^2(\Gamma^R)}.$$

Si $\beta > 0$ et $\nu \geqslant 0$ on obtient directement la coercivité :

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \min(\alpha,\beta) \left\|u\right\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega).$$

On suppose maintenant $\beta \leqslant 0$. Comme $u \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ et $\mathrm{mes}(\Gamma^D) > 0$, on peut utiliser l'inégalité de Poincaré (1.4.32) pour obtenir

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant (\alpha + \beta C_p^2(\Omega)) \left\|\nabla u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu \left\|u\right\|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

Si $\alpha + \beta C_p^2(\Omega) > 0$, on peut alors utiliser l'inégalité (1.4.33) pour obtenir

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \frac{\alpha + \beta C_p^2(\Omega)}{C_p^2(\Omega)+1} \left\|u\right\|^2_{H^1(\Omega)} + \nu \left\|u\right\|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

Donc, si $\beta > -\frac{\alpha}{C_p(\Omega)^2}$ et $\nu \geqslant 0$, on a la coercivité

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \frac{\alpha + \beta C_p^2(\Omega)}{C_p(\Omega)^2+1} \left\|u\right\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega).$$

Remarque 2. *On peut améliorer le résultat en prenant $\beta > -\frac{\alpha}{C_p^2(\Omega)}$ et $\nu < 0$.*
Par continuité de l'application linéaire trace sur Γ^R, (voir théorème 18) il existe $C_{\Gamma^R} > 0$ telle que

$$|\gamma(u)| \leqslant C_{\Gamma^R} \left\|u\right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ce qui entraine

$$\left\|u\right\|^2_{L^2(\Gamma^R)} \leqslant C^2_{\Gamma^R} |\Gamma^R| \left\|u\right\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

On obtient alors

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \left(\frac{\alpha + \beta C_p^2(\Omega)}{C_p^2(\Omega)+1} + \nu C^2_{\Gamma^R}|\Gamma^R|\right) \left\|u\right\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega).$$

On a donc coercivité si

$$\beta > -\frac{\alpha}{C_p^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \nu > -\frac{\alpha + \beta C_p^2(\Omega)}{C^2_{\Gamma^R}|\Gamma^R|(C_p^2(\Omega)+1)}.$$

◊

2.4 Exercice 4

EXERCICE 4

Soit l'EDP

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathbb{M}\nabla u) + a_0 u &= f \quad \text{dans } \Omega & (1)\\ u &= g_D \quad \text{sur } \Gamma^D & (2)\\ a_1 u + \langle \mathbb{M}\nabla u, \boldsymbol{n}\rangle &= g_R \quad \text{sur } \Gamma^R & (3)\end{aligned}$$

où $\boldsymbol{n}$ désigne la normale à Γ orientée vers l'extérieur de Ω.
On suppose que

1. $\forall i, j \in \{1, \dots, d\}$ $\mathbb{M}_{i,j} \in W^{1,\infty}(\Omega)$,
2. $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_1 \in L^\infty(\Gamma^R)$, $f \in L^2(\Omega)$,
3. $g_D \in H^{1/2}(\Gamma^D)$ et $g_R \in L^2(\Gamma^R)$,
4. $\mathbb{M}$ est une matrice carrée d'ordre d symétrique qui dépend continûment de la variable $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, \dots, x_d)$.

$$\operatorname{div}(\mathbb{M}\,\boldsymbol{\nabla} u) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[M_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]$$

et

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad \langle \mathbb{M}(\vec{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}\rangle \geqslant \alpha \left\|\boldsymbol{\xi}\right\|^2 \quad \text{pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Omega. \tag{4}$$

On note $H^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega)$ l'ensemble défini par

$$H^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \ \text{ t.q. } \ v_{|_{\Gamma^D}} = g_D\}.$$

Q. 1. *Montrer qu'une formulation variationnelle associée à l'EDP peut s'écrire sous la forme*

trouver $u \in U$, tel que

$$\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in V, \tag{5}$$

où l'on explicitera les fonctions $\mathcal{A}(u, v)$ et $\mathcal{L}(v)$ ainsi que les espaces U et V.

Q. 2. *Que peut-on dire des espaces $H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ et $H^1_{g,\Gamma^D}(\Omega)$?*

Q. 3. *Montrer que sous les hypothèses*

$$a_0(x) \geqslant \beta > -\frac{\alpha}{C_p^2(\Omega)} \quad \textit{pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Omega, \tag{6}$$

et

$$a_1(x) \geqslant 0 \ \textit{pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Gamma^R, \tag{7}$$

le problème variationnel associé à l'EDP admet une unique solution dans $H^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega)$. Ici, $C_p(\Omega)$ est la constante de Poincaré :

$$\int_\Omega v^2(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) \leqslant C_p^2(\Omega)\int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} v(\vec{\boldsymbol{x}})|^2 d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}), \ \ \forall v \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega).$$

Correction

Q. 1: Pour obtenir une formulation variationnelle associée au problème (1)-(2)-(3), on multiplie (1) par une fonction suffisament régulière v et on intègre sur Ω :

$$\int_\Omega \left(a_0(\vec{\boldsymbol{x}})u(\vec{\boldsymbol{x}}) - (\operatorname{div}(\mathbb{M}\,\boldsymbol{\nabla} u))(\vec{\boldsymbol{x}})\right) v(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) = \int_\Omega f(\vec{\boldsymbol{x}})v(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) \tag{8}$$

En utilisant (1) de l'exercice 1, l'équation précédente devient

$$\begin{array}{c} \int_\Omega a_0(\vec{\boldsymbol{x}})u(\vec{\boldsymbol{x}})v(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) + \int_\Omega \langle \boldsymbol{\nabla} v(\vec{\boldsymbol{x}}), (\mathbb{M}\,\boldsymbol{\nabla} u))(\vec{\boldsymbol{x}})\rangle\, d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) - \displaystyle\int_\Gamma v(\vec{\boldsymbol{x}})\,\langle(\mathbb{M}\,\boldsymbol{\nabla} u)(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{n}(\vec{\boldsymbol{x}})\rangle\, d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}) \\ = \\ \int_\Omega f(\vec{\boldsymbol{x}})v(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) \end{array} \tag{9}$$

On décompose ensuite l'intégrale sur le bord

$$\int_{\Gamma} v(\vec{\boldsymbol{x}}) \langle (\mathbb{M} \boldsymbol{\nabla} u)(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{n}(\vec{\boldsymbol{x}}) \rangle \, d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}) = \int_{\Gamma^D} v(\vec{\boldsymbol{x}}) \langle (\mathbb{M} \boldsymbol{\nabla} u)(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{n}(\vec{\boldsymbol{x}}) \rangle \, d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}) + \int_{\Gamma^R} v(\vec{\boldsymbol{x}}) \langle (\mathbb{M} \boldsymbol{\nabla} u)(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{n}(\vec{\boldsymbol{x}}) \rangle \, d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}).$$

On utilise la condition de Robin (1) sur Γ^R pour obtenir

$$\int_{\Gamma^R} v(\vec{\boldsymbol{x}}) \langle (\mathbb{M} \boldsymbol{\nabla} u)(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{n}(\vec{\boldsymbol{x}}) \rangle \, d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}) = \int_{\Gamma^R} g_R(\vec{\boldsymbol{x}}) v(\vec{\boldsymbol{x}}) d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}) - \int_{\Gamma^R} a_1(\vec{\boldsymbol{x}}) u(\vec{\boldsymbol{x}}) v(\vec{\boldsymbol{x}}) d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}).$$

Classiquement, on choisit v de telle sorte d'annuler l'intégrale sur le bord Dirichlet : $v_{|\Gamma^D} = 0$. On prend donc $v \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ et la formulation variationnelle obtenue est

trouver $u \in H^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega)$, tel que

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega), \tag{10}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u,v) &= \int_{\Omega} \langle \boldsymbol{\nabla} v(\vec{\boldsymbol{x}}), (\mathbb{M} \boldsymbol{\nabla} u))(\vec{\boldsymbol{x}}) \rangle + a_0(\vec{\boldsymbol{x}}) u(\vec{\boldsymbol{x}}) v(\vec{\boldsymbol{x}}) d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) \\ &+ \int_{\Gamma^R} a_1(\vec{\boldsymbol{x}}) u(\vec{\boldsymbol{x}}) v(\vec{\boldsymbol{x}}) d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}(v) = \int_{\Omega} f(\vec{\boldsymbol{x}}) v(\vec{\boldsymbol{x}}) d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) + \int_{\Gamma^R} g_R(\vec{\boldsymbol{x}}) v(\vec{\boldsymbol{x}}) d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}).$$

Q. 2: Muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$, $H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Soit $g \in L^2(\Gamma^D)$, $g \neq 0$ alors $H^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega)$ n'est pas un espace de Hilbert (ce n'est pas un espace vectoriel).

Q. 3: Il n'est pas possible d'utiliser directement le théorème de Lax-Milgram 25(page 11) pour obtenir existence et unicité d'une solution de la formulation variationnelle (10) car l'espace où l'on recherche la fonction u n'est pas le même que celui des fonctions tests v.

Cependant, on peut contourner le problème en utilisant un relèvement de la fonction g_D. En effet, $g_D \in H^{1/2}(\Gamma^D)$, par définition il existe un relèvement $R \in H^1(\Omega)$ telle que $\gamma_{\Gamma^D}(R) = g_D$. Supposons u soit solution de (10), on pose $w = u - R$, alors $w \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ et, par bilinéarité de $\mathcal{A}$, w est solution de la formulation variationnelle

trouver $w \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$, tel que

$$\mathcal{A}(w,v) = \mathcal{L}_R(v) \quad \forall v \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega), \tag{11}$$

avec

$$\mathcal{L}_R(v) = \mathcal{L}(v) - \mathcal{A}(R,v).$$

On remarque tout de suite que cette formulation variationnelle est indépendante de u solution de (10) ; elle ne dépend que du relèvement R_D. Donc, si l'on obtient l'existence de w solution de (11) alors $u = w + R$ appartiendra à $H^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega)$ et sera solution de (10).

Pour démontrer l'existence et l'unicité de (11), on va vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

Pour celà, on utilise les applications $\mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},a_0}$ et $\mathcal{L}^{g}_{f}$ des exercices 2 et 3. On a

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{A} \;:\; H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)\times H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\mathbf{0},\mathbf{0},a_0}(u,v) \end{array}\right. \tag{12}$$

avec

$$\mu = \left\{\begin{array}{ll} a_1 & \text{sur } \Gamma^R \\ 0 & \text{sur } \Gamma^D \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{L}_R \;:\; H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \mathcal{L}^{g_R}_{f}(v) - \mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\mathbf{0},\mathbf{0},a_0}(R,v) \end{array}\right. \tag{13}$$

On va pouvoir utiliser les résultats obtenus dans ces deux exercices car Les fonctions f et g_R vérifient les hypothèses de l'exercice 2 :

$$f \in L^2(\Omega),\;\; g_R \in L^2(\Gamma^R).$$

Les fonctions $\mathbb{M}$, a_0 et μ vérifient les hypothèses de l'exercice 3 :
$\forall i,j \in \{1,\dots,d\}$ $\mathbb{M}_{i,j}, p_i, q_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\mu \in L^\infty(\Gamma)$.

On vérifie maintenant que l'on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram 25(page 11) à la formulation variationnelle (11) :

- $H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ *est un hilbert ?* on a déjà montré que $H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$, muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$, est un espace de Hilbert,
- *Linéarité de $\mathcal{L}_R$?* On a vu que $\mathcal{L}^{g_R}_{f}$ est une application de $H^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ linéaire. Comme $H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ est un s.e.v. de $H^1(\Omega)$, on obtient que la restriction de $\mathcal{L}^{g_R}_{f}$ a $H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ reste une application linéaire.
  On a vu aussi que $\mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\mathbf{0},\mathbf{0},a_0}$ est une application linéaire de $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Comme $R \in H^1(\Omega)$, l'application $\mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\mathbf{0},\mathbf{0},a_0}(R,\bullet)$ de $H^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ est donc linéaire. La restriction de cette application a $H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ reste une application linéaire.
  On en déduit alors la linéarité de l'application $\mathcal{L}_R$ définie en (13).
- *Continuité de $\mathcal{L}_R$?* Comme $\mathcal{L}_R$ est linéaire et que $H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ est muni de la norme de $H^1(\Omega)$, il suffit de démontrer que

  $$|\mathcal{L}_R(v)| \leqslant C\,\|v\|_{H^1(\Omega)},\;\; \forall v \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega).$$

  On a, $\forall v \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$

  $$|\mathcal{L}_R(v)| \leqslant |\mathcal{L}^{g_R}_{f}(v)| + |\mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\mathbf{0},\mathbf{0},a_0}(R,v)|$$

  et on utilise ensuite la continuité des applications $\mathcal{L}^{g_R}_{f}$ et $\mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\mathbf{0},\mathbf{0},a_0}$ pour obtenir

  $$\begin{aligned} |\mathcal{L}_D(v)| &\leqslant C_{\mathcal{L}}\,\|v\|_{H^1(\Omega)} + C_{\mathcal{A}}\,\|R\|_{H^1(\Omega)}\,\|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leqslant (C_{\mathcal{L}} + C_{\mathcal{A}}\,\|R\|_{H^1(\Omega)})\,\|v\|_{H^1(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

  où $C_{\mathcal{L}}$ et $C_{\mathcal{A}}$ sont respectivement les constantes de continuité des applications $\mathcal{L}^{g_R}_{f}$ et $\mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\mathbf{0},\mathbf{0},a_0}$.
- *Bilinéarité de $\mathcal{A}$?* Découle directement de la bilinéarité de $\mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\mathbf{0},\mathbf{0},a_0}$ de l'exercice 3.
- *Continuité de $\mathcal{A}$?* Découle directement de la continuité de $\mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\mathbf{0},\mathbf{0},a_0}$ de l'exercice 3.

- *Coercivité de $\mathcal{A}$?* Pour obtenir la coercivité de $\mathcal{A}$, il faut, d'après l'exercice 3-Q.5, avoir les hypothèses (8)(page 16) et (9), c'est à dire

$$\beta > -\frac{\alpha}{C_p^2(\Omega)}$$

  et

$$\mu(\vec{\boldsymbol{x}}) \geqslant 0 \quad \text{pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Gamma^D.$$

  Cette dernière condition est immédiatement équivalente à (7)

$$a_1(\vec{\boldsymbol{x}}) \geqslant 0 \quad \text{pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Gamma^R.$$

Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées ! Il existe donc une unique solution au problème variationnel (11) que l'on note w. On pose alors $u = w+R$, et on obtient da manière immédiate $u \in H^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega)$ et u solution du problème variationnel (10).

L'existence étant établi, il faut démontrer l'unicité. Pour celà, on suppose qu'il existe u_1 et u_2 dans $H^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega)$ solution de (10). On a alors, $\forall v \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$

$$\mathcal{A}(u_1, v) = \mathcal{L}(v) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(u_2, v) = \mathcal{L}(v).$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient

$$\mathcal{A}(u_1 - u_2, v) = 0, \ \ \forall v \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) \tag{14}$$

De plus, comme $u_1 - u_2 \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ on peut utiliser la coercivité de $\mathcal{A}$ dans $H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) \times H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ avec $v = u_1 - u_2$ pour obtenir

$$\mathcal{A}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geqslant \nu \left\| u_1 - u_2 \right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Or, d'après (14) en prenant $v = u_1 - u_2$, on obtient

$$\mathcal{A}(u_1 - u_2, u_1 - u2) = 0.$$

On a donc

$$\left\| u_1 - u_2 \right\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

c'est à dire $u_1 = u_2$ dans $H^1(\Omega)$.

$\diamondsuit$