Sup Galilée-MACS 2ème année | **Analyse Numérique**
Institut Galilée | **Année 2007-2008**

Travaux dirigés - 5

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ dont la frontière Γ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit Γ^D et Γ^R deux partie complémentaires de Γ :

$$\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^R, \quad \Gamma^D \cap \Gamma^R = \emptyset.$$

Exercice 1

On note $\boldsymbol{n}$ désigne la normale à Γ orientée vers l'extérieur de Ω.

Q. 1. *Montrer que* $\forall u \in H^2(\Omega)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$, *et* $\forall i,j \in \{1,\ldots,d\}$ $\mathbb{M}_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$

$$\begin{gathered}\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbb{M}\boldsymbol{\nabla} u)(\vec{\boldsymbol{x}})v(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) \\ = \\ -\int_\Omega \langle(\mathbb{M}\boldsymbol{\nabla} u)(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{\nabla} v(\vec{\boldsymbol{x}})\rangle\, d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) + \int_\Gamma \langle(\mathbb{M}\boldsymbol{\nabla} u)(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{n}(\vec{\boldsymbol{x}})\rangle\, v(\vec{\boldsymbol{x}})d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}),\end{gathered} \tag{1}$$

Q. 2. *Montrer que* $\forall \boldsymbol{b} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^d$, $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \langle \boldsymbol{b}(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{\nabla} v(\vec{\boldsymbol{x}})\rangle v(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{b}(\vec{\boldsymbol{x}}))v^2(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) + \frac{1}{2}\int_\Gamma \langle \boldsymbol{b}(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{n}(\vec{\boldsymbol{x}})\rangle\, v^2(\vec{\boldsymbol{x}})d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}}) \tag{2}$$

Exercice 2

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma^R)$. On défini l'application $\mathcal{L}_f^g$ de $H^1(\Omega)$ à valeurs réelles par

$$\mathcal{L}_f^g(v) = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma^R} gv. \tag{1}$$

Q. 1. *Montrer que l'application* $\mathcal{L}_f^g$ *est linéaire continue.*

Exercice 3

Soit V un sous-espace de $H^1(\Omega)$ tel que

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega).$$

On note $\mathcal{A}$ l'application de $V \times V$ à valeurs réelles définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},a_0}(u,v) \quad = \quad & \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \mathbb{M}_{i,j}(\vec{\boldsymbol{x}})\frac{\partial u}{\partial x_j}(\vec{\boldsymbol{x}})\frac{\partial v}{\partial x_i}(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) \\ & - \int_\Omega \sum_{i=1}^d (p_i(\vec{\boldsymbol{x}})v(\vec{\boldsymbol{x}})\frac{\partial u}{\partial x_i}(\vec{\boldsymbol{x}}) - q_i(\vec{\boldsymbol{x}})u(\vec{\boldsymbol{x}})\frac{\partial v}{\partial x_i}(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) \\ & + \int_\Omega a_0(\vec{\boldsymbol{x}})u(\vec{\boldsymbol{x}})v(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) + \int_\Gamma \mu(x)u(\vec{\boldsymbol{x}})v(\vec{\boldsymbol{x}})d\Gamma(\vec{\boldsymbol{x}})\end{aligned} \tag{1}$$

où $\forall i,j \in \{1,\ldots,d\}$ $\mathbb{M}_{i,j}, p_i, q_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\mu \in L^\infty(\Gamma)$.
Pour simplifier les notations, on pose $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},a_0}$.

Q. 1. *Montrer que pour $V = H^1(\Omega)$, l'application $\mathcal{A}$ est bilinéaire continue.*

Pour la suite, on suppose que $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in (H_0^1(\Omega))^d$,

$$\exists \beta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{1}{2}\operatorname{div}(\boldsymbol{p}(\vec{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{q}(\vec{\boldsymbol{x}})) + a_0(\vec{\boldsymbol{x}}) \geqslant \beta \text{ pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Omega \tag{2}$$

et

$$\exists \alpha > 0, \ \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \ \langle \mathbb{M}(\vec{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle \geqslant \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \text{ pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Omega. \tag{3}$$

Q. 2. *Montrer que $\forall u \in H^1(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},a_0}(u,u) &= \int_\Omega \langle \mathbb{M} \boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} u \rangle + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\operatorname{div}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) + a_0 \right) u^2 \\ &\quad + \int_\Gamma \left(\mu - \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, \boldsymbol{n} \rangle \right) u^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega) \end{aligned} \tag{4}$$

Q. 3. *Montrer que pour $V = H_0^1(\Omega)$ l'application $\mathcal{A}$ est coercive si*

$$\beta > -\frac{\alpha}{C_p^2(\Omega)} \tag{5}$$

où $C_p(\Omega)$ est la constante de Poincaré :

$$\int_\Omega v^2(\vec{\boldsymbol{x}}) d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) \leqslant C_p^2(\Omega) \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} v(\vec{\boldsymbol{x}})|^2 d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}), \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Q. 4. *Montrer que pour $V = H^1(\Omega)$ l'application $\mathcal{A}$ est coercive si*

$$\beta > 0 \tag{6}$$

et

$$\mu(\vec{\boldsymbol{x}}) - \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{p}(\vec{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{q}(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{n}(\vec{\boldsymbol{x}}) \rangle \geqslant \nu \geqslant 0 \text{ pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Gamma. \tag{7}$$

Q. 5. *Montrer que pour $V = H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v_{\Gamma^D} = 0 \right\}$, l'application $\mathcal{A}^{\mu}_{\mathbb{M},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},a_0}$ est coercive si*

$$\beta > -\frac{\alpha}{C_p^2(\Omega)} \tag{8}$$

et

$$\mu(\vec{\boldsymbol{x}}) - \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{p}(\vec{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{q}(\vec{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{n}(\vec{\boldsymbol{x}}) \rangle \geqslant \nu \geqslant 0 \text{ pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Gamma^R. \tag{9}$$

Exercice 4

Soit l'EDP

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathbb{M} \boldsymbol{\nabla} u) + a_0 u &= f \quad \text{dans } \Omega &(1)\\ u &= g_D \quad \text{sur } \Gamma^D &(2)\\ a_1 u + \langle \mathbb{M} \boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{n} \rangle &= g_R \quad \text{sur } \Gamma^R &(3) \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{n}$ désigne la normale à Γ orientée vers l'extérieur de Ω.

On suppose que

1. $\forall i,j \in \{1,\dots,d\}$ $\mathbb{M}_{i,j} \in W^{1,\infty}(\Omega)$,
2. $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_1 \in L^\infty(\Gamma^R)$, $f \in L^2(\Omega)$,
3. $g_D \in H^{1/2}(\Gamma^D)$ et $g_R \in L^2(\Gamma^R)$,
4. $\mathbb{M}$ est une matrice carrée d'ordre d symétrique qui dépend continûment de la variable $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, \dots, x_d)$.

$$\operatorname{div}(\mathbb{M}\,\boldsymbol{\nabla}\,u) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[M_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]$$

et

$$\exists \alpha > 0,\ \ \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d,\ \ \langle \mathbb{M}(\vec{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}\rangle \geqslant \alpha \left\|\boldsymbol{\xi}\right\|^2 \quad \text{pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Omega. \tag{4}$$

On note $H^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega)$ l'ensemble défini par

$$H^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \ \ \text{t.q.}\ \ v_{|_{\Gamma^D}} = g_D\}.$$

Q. 1. *Montrer qu'une formulation variationnelle associée à l'EDP peut s'écrire sous la forme*

trouver $u \in U$, tel que

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v) \ \ \forall v \in V, \tag{5}$$

où l'on explicitera les fonctions $\mathcal{A}(u,v)$ et $\mathcal{L}(v)$ ainsi que les espaces U et V.

Q. 2. *Que peut-on dire des espaces $H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$ et $H^1_{g,\Gamma^D}(\Omega)$?*

Q. 3. *Montrer que sous les hypothèses*

$$a_0(x) \geqslant \beta > -\frac{\alpha}{C_p^2(\Omega)} \quad \textit{pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Omega, \tag{6}$$

et

$$a_1(x) \geqslant 0 \ \textit{pour presque tout } \vec{\boldsymbol{x}} \in \Gamma^R, \tag{7}$$

le problème variationnel associé à l'EDP admet une unique solution dans $H^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega)$. Ici, $C_p(\Omega)$ est la constante de Poincaré :

$$\int_\Omega v^2(\vec{\boldsymbol{x}})d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}) \leqslant C_p^2(\Omega)\int_\Omega |\boldsymbol{\nabla}\,v(\vec{\boldsymbol{x}})|^2 d\Omega(\vec{\boldsymbol{x}}),\ \ \forall v \in H^1_{0,\Gamma^D}(\Omega).$$