Travaux dirigés - 1

Exercice 1 (Révisions - Quelques inégalités)

Q. 1 Inégalité de Young
Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, $p \in]1, +\infty[$, p' défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Montrer que l'on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^{p'}}{p'}. \tag{1}$$

Q. 2 *Déduire de cette inégalité que l'on a, pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$ab \leq \varepsilon \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}.$$

Q. 3 Inégalité de Hölder (Cauchy-Schwarz si *p=p'=2*)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec p' défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 \leq p \leq +\infty$. Montrer qu'alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Indication : Utiliser (1) en remplaçant f par λf ($\lambda > 0$) pour obtenir

$$\int_\Omega |fg| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{\lambda p'} \|g\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Choisir ensuite λ de façon à minimiser le membre de droite dans l'inégalité précédente.

Exercice 2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Pour $v \in H^1(]a, b[)$, on pose :

$$w(x) = \int_a^x v'(s) ds.$$

Q. 1 *Montrer que $w \in \mathcal{C}^0([a, b])$ et $w' = v'$ au sens faible.*

Q. 2 *En déduire que $w \in H^1(]a, b[)$, puis que $v \in \mathcal{C}^0([a, b])$ et :*

$$v(x) - v(y) = \int_y^x v'(s) ds, \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2. \tag{2}$$

Q. 3 *En utilisant (2), montrer que l'injection de $H^1(]a, b[)$ dans $\mathcal{C}^0([a, b])$ est continue.*

Q. 4 *En déduire que les applications «trace» suivantes sont linéaires continues*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_a & : & H^1(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ & & v & \mapsto & v(a) \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} \gamma_b & : & H^1(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ & & v & \mapsto & v(b) \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} \gamma_0 & : & H^1(a,b) & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & v & \mapsto & (v(a), v(b)) \end{array}.$$

Q. 5 *L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ n'est vraie qu'en dimension 1. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 2$, montrer que l'on peut trouver une fonction $u \in H^1(\Omega)$ avec $u \notin \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.*

Indication : prendre $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| < 1\}$ et chercher u sous la forme : $x \longrightarrow \|x\|^\alpha$ (utiliser les coordonnées sphériques).

Exercice 3 (inégalité de Poincaré)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Q. 1 *Soit $V = H_0^1(a, b)$, montrer que l'on a l'inégalité de Poincaré :*

$$\forall v \in V, \quad \left(\int_a^b |v(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq C \left(\int_a^b |v'(x)|^2 dx\right)^{1/2} \tag{3}$$

où la constante de Poincaré C peut-être donnée par

$$C = \frac{b-a}{\sqrt{2}}.$$

Q. 2 *Même question avec $V = \{v \in H^1(a, b) \mid v(a) = 0\}$ muni de la norme de $H^1(a, b)$.*

Q. 3 *Même question avec $V = \{v \in H^1(a, b) \mid v(b) = 0\}$ muni de la norme de $H^1(a, b)$.*

Q. 4 *Que peut-on dire pour $V = H^1(a, b)$?*

Indication : on pourra utiliser les relations

$$v(x) - v(a) = \int_a^x v'(s)ds \quad \text{et} \quad v(b) - v(x) = \int_x^b v'(s)ds.$$

Exercice 4

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ $a < b$.

Q. 1 *A l'aide des résultats de l'exercice 2 montrer que l'espace $V = H_0^1(a, b)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(a, b)$.*

Q. 2 *Même question avec $V = \{v \in H^1(a, b) \mid v(a) = 0\}$.*

Q. 3 *Même question avec $V = \{v \in H^1(a, b) \mid v(b) = 0\}$.*

Q. 4 *Que peut-on dire des espaces $V_1 = \{v \in H^1(a, b) \mid v(a) = C_1\}$, $V_2 = \{v \in H^1(a, b) \mid v(b) = C_2\}$ et $V_3 = \{v \in H^1(a, b) \mid v(a) = C_3$ et $v(b) = C_4\}$ où $C_1 \in \mathbb{R}^*$, $C_2 \in \mathbb{R}^*$, et $(C_3, C_4) \in \mathbb{R}^2$ avec C_3 ou C_4 non nul ?*

Exercice 5

Q. 1 *Montrer que*

$$|v|_{H^1(a,b)} = \left(\int_a^b |v'(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

est une semi-norme sur $H^1(a, b)$. Est-ce une norme sur $H^1(a, b)$?

Q. 2 *Montrer que $|.|_{H^1(a,b)}$ est une norme équivalente à la norme $\|.\|_{H^1(a,b)}$ sur les espaces $H_0^1(a, b)$, $V_a = \{v \in H^1(a, b) \mid v(a) = 0\}$ et $V_b = \{v \in H^1(a, b) \mid v(b) = 0\}$.*