CHAPITRE 1

Fonctions holomorphes

1. La sphère de Riemann

On commence par construire une application entre le plan complexe et la sphère de dimension 2 dans l'espace ; ceci permet de compactifier le plan complexe et de donner un sens à la notion d'infini pour les nombres complexes. On considère le plan complexe $\mathbf{C}$ auquel on adjoint une troisième dimension $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$, et on identifie $\mathbf{C}$ et le plan $\mathbf{C} \times \{-1\}$. Soit S^2 la sphère unité de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$

$$S^2 = \big\{(z,t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R} : |w|^2 + t^2 = 1\big\}.$$

tangente au plan $\mathbf{C} \times \{-1\}$ en son pôle sud $(0,-1)$. La *projection stéréographique* de pôle nord $(0,1)$

$$\pi_N : S^2 \setminus \{(0,1)\} \to \mathbf{C}$$

est définie de la manière suivante : à tout point (w,t) de la sphère privée du pôle nord, on fait correspondre l'intersection $(z,-1)$ entre le plan complexe $\mathbf{C} \times \{-1\}$ et la droite joignant le pôle nord $(0,1)$ et le point (w,t). Si l'on identifie $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C} \times \{-1\}$, il est raisonnable d'oublier la troisième coordonnée et de poser $z = \pi_N(w,t)$. De manière analytique, le fait que la projection $(z,-1)$, le point (w,t) et le pôle nord soient alignés se traduit de la manière suivante

$$(z,-2) = \lambda(w, t-1)$$

soit $\lambda = 2/(1-t)$ et donc

$$\pi_N(w,t) = \frac{2w}{1-t}. \tag{1.1}$$

Il est facile de construire géométriquement l'application réciproque

$$\pi_N^{-1} : \mathbf{C} \to S^2 \setminus \{(0,1)\}$$

à tout point $(z,-1)$ du plan complexe $\mathbf{C} \times \{-1\}$ on fait correspondre l'intersection (w,t) distincte du pôle nord, entre la sphère S^2 et la droite joignant $(z,-1)$ et le pôle nord. De manière analytique, le fait que les points (w,t), $(z,-1)$ et le pôle nord soient alignés se traduit de la manière suivante

$$(w, t-1) = \mu(z,-2), \quad \mu \neq 0.$$

Le fait que (w,t) appartienne à la sphère S^2 implique

$$1 = \mu^2(4 + |z|^2) + 1 - 4\mu$$

soit $\mu = 4/(4+|z|^2)$, et donc

$$\pi_N^{-1}(z) = \frac{1}{4+|z|^2}\big(4z, |z|^2-4\big). \tag{1.2}$$

Remarque 1.1. Les images des méridiens par la projection stéréographique sont des demi-droites concourantes en l'origine, et celle des parallèles des cerles concentriques autour de l'origine. En effet, en coordonnées sphériques,

$$w = e^{i\varphi}\cos\theta, \quad t = \sin\theta, \quad \varphi \in [0, 2\pi],\ \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

l'équation d'un méridien est $\varphi = \varphi_0$, l'image d'un méridien par la projection stéréographique est donc la courbe

$$\frac{2\cos\theta}{1-\sin\theta}\, e^{i\varphi_0}, \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

i.e. la demi-droite d'équation $\arg z = \varphi_0$ dans $\mathbf{C}$. De même, l'image d'un parallèle $\theta = \theta_0$ est le cercle de centre l'origine et de rayon $2\cos\theta_0/(1-\sin\theta_0)$.

Remarque 1.2. La projection stéréographique préserve les angles. Soient $\gamma, \tilde\gamma : [0,1] \to S^2$ deux courbes tracées sur la sphère qui s'intersectent en un point régulier $(w_0, t_0) = \gamma(s_0) = \tilde\gamma(s_0)$. On note $(w_0', t_0') = \gamma'(s_0)$ et $(\tilde w_0', \tilde t_0') = \tilde\gamma'(s_0)$ les tangentes respectives aux courbes γ et $\tilde\gamma$ en (w_0, t_0). La tangente à la courbe projetée $\pi_N \circ \gamma$ en (w_0, t_0) est donnée par

$$(\pi_N \circ \gamma)'(s_0) = \frac{2w_0'\,(1-t_0) + 2w_0\, t_0'}{(1-t_0)^2}$$

et $\gamma'(s_0)$ étant tangent à la sphère, on a

$$\mathrm{Re}(w_0'\,\overline{w_0}) + t_0'\, t_0 = 0. \tag{1.3}$$

Des relations similaires sont valables pour la courbe $\tilde\gamma$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\Big((\pi_N \circ \gamma)'(s_0)\overline{(\pi_N \circ \tilde\gamma)'(s_0)}\Big) &= \frac{4}{(1-t_0)^4}\Big(\mathrm{Re}(w_0'\,\overline{\tilde w_0'}\,(1-t_0)^2 + t_0'\,\tilde t_0'\,|w_0|^2 \\ &\qquad + (1-t_0)\underbrace{\mathrm{Re}(w_0'\,\overline{w_0})\,\tilde t_0' + \mathrm{Re}(\tilde w_0'\,\overline{w_0})\,t_0'}_{=-2t_0'\,\tilde t_0'\,t_0 \ \text{ d'après (1.3)}}\Big) \\ &= \frac{4}{(1-t_0)^2}\big(\mathrm{Re}(w_0'\,\overline{\tilde w_0'}) + t_0'\,\tilde t_0'\big) \end{aligned}$$

ce qui signifie que le produit scalaire des vecteurs tangents aux courbes projetées est un multiple du produit scalaire des vecteurs tangents aux courbes sur la sphère. Par conséquent, l'application

$$\begin{aligned} T_{(w_0,t_0)}S^2 &\to \mathbf{C} \\ \gamma'(s_0) &\mapsto (\pi_N \circ \gamma)'(s_0) \end{aligned}$$

où $T_{(w_0,t_0)}S^2$ désigne le plan tangent à la sphère en (w_0, t_0), d'équation (1.3), est une similitude. Ainsi, si deux courbes sur la sphère s'intersectent selon un angle θ

, i.e. les vecteurs tangents aux courbes en ce point d'intersection forment l'angle θ, c'est aussi le cas des courbes projetées.

La projection stéréographique π_N et sa réciproque π_N^{-1} sont des applications continues : le plan complexe est donc homéomorphe à une sphère privée d'un point. Il manque en quelque sorte un point pour rendre le plan complexe compact. En outre, on a

$$\lim_{|z|\to+\infty} \pi_N^{-1}(z) = (0,1)$$

le pôle nord représente donc le point à l'infini du plan complexe. Pour rendre le plan complexe compact, on adjoint[1] donc un point que l'on note ∞

$$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

et on munit $\widehat{\mathbf{C}}$ de la topologie la moins fine qui rende π_N et π_N^{-1} continues, de sorte que $\widehat{\mathbf{C}}$ et la sphère S^2, appelée *sphère de Riemann*, soient homéomorphes. Une telle topologie est constituée des ouverts de $\mathbf{C}$ auxquels on adjoint les voisinages de l'infini, des sous-ensembles de $\widehat{\mathbf{C}}$ contenant

$$\{\infty\} \cup \big\{z \in \mathbf{C} : |z| > R\big\}.$$

2. Intégrales curvilignes et formule de Stokes

On considère les deux opérateurs différentiels

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

Le premier est généralement appelé opérateur de Cauchy-Riemann ou *d-barre*. On utilise les notation dz et $d\bar{z}$ pour désigner respectivement les formes linéaires $z \mapsto z$ et $z \mapsto \bar{z}$ sur $\mathbf{C}$, et la notation $dz \wedge d\bar{z}$ pour désigner la forme bilinéaire alternée donnée par

$$d\bar{z} \wedge dz(w, w') = \det\begin{pmatrix} \operatorname{Re} w & \operatorname{Re} w' \\ \operatorname{Im} w & \operatorname{Im} w' \end{pmatrix} = \operatorname{Im}(w\overline{w'}).$$

Soit Ω un ouvert du plan complexe, une 1-forme différentielle de classe C^k sur Ω est une application de classe C^k de Ω dans l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbf{C}$. Concrètement, une forme différentielle ω est une expression de la forme

$$\omega = u(z)dz + v(z)d\bar{z} \tag{2.1}$$

où u et v sont des fonctions de classe C^k sur Ω. Un exemple est la différentielle d'une fonction f de classe C^1 sur Ω qui s'écrit avec ces notations

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)d\bar{z}.$$

[1] Ceci peut être fait de la manière suivante : on identifie comme avant le plan complexe au plan $\mathbf{C} \times \{-1\}$ de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ et on choisit par exemple $\infty = N$ de sorte que $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \times \{-1\} \cup \{N\}$.

Une 2-forme différentielle de classe C^k sur Ω est une application de classe C^k de Ω dans l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées sur $\mathbf{C}$. Concrètement, une 2-forme différentielle est une expression de la forme

$$w(z)d\bar{z} \wedge dz \tag{2.2}$$

où w est une fonction de classe C^k sur Ω.

Définition 2.1. *Un chemin de Ω est une application continue $I \to \Omega$ et C^1 par morceaux sur un intervalle compact I. La plupart du temps, on se ramènera au cas $I = [0, 1]$; dans ce cas, $\gamma(0)$ est l'origine et $\gamma(1)$ l'extrémité du chemin γ. Un lacet est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondus $\gamma(0) = \gamma(1)$.*

Deux chemins γ et $\tilde{\gamma}$ ont même *orientation* s'il existe deux subdivisions $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ et $s_0 < s_1 < \cdots < s_n$ de l'intervalle I et des difféomorphismes $\tau_j : [t_j, t_{j+1}] \to [s_j, s_{j+1}]$ de classe C^1 tels que

$$\tau_j(t_j) = s_j \quad \tau_j(t_{j+1}) = s_{j+1}, \quad \tau_j'(t) > 0, \quad \tilde{\gamma}(t) = \gamma \circ \tau_j(t),\ t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Avoir même orientation est une relation d'équivalence, la donnée d'une classe d'équivalence définit un *chemin orienté*. On change l'orientation d'une courbe en utilisant des changements de paramétrisation $\tau_j'(t) < 0$, par exemple avec $\tau_j(t) = t_j + t_{j+1} - t$.

Exemple 1. Le cercle de centre z_0 et de rayon r orienté dans le sens trigonométrique est le chemin orienté

$$\begin{aligned}[0, 1] &\to \mathbf{C}\\ t &\mapsto z_0 + e^{i2\pi t}.\end{aligned}$$

On le note $C(z_0, r)$.

Remarque 2.2. On a tendance à confondre les chemins orientés avec leur support géométrique $\Gamma = \gamma(I)$ et la donnée d'une orientation, ce qui explique la notation $C(z_0, r)$ qui désigne également le cercle de centre $z_0$et de rayon r. Dans la pratique, ces notations ne seront pas équivoques et ne donneront pas lieu à des confusions.

Dans la plupart des énoncés qui vont suivre, il est sous-entendu que les chemins ou lacets sont orientés.

Si γ est un chemin orienté de Ω, l'intégrale de ω le long de γ est la quantité

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(u \circ \gamma(t)\,\gamma'(t) + v \circ \gamma(t)\,\overline{\gamma'(t)}\right) dt$$

si $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ est une subdivision de $[0, 1]$ telle que γ soit de classe C^1 sur chacun des sous-intervalles $]t_j, t_{j+1}[$. La valeur de cette intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie. En outre si γ^- est un chemin orienté obtenu à partir d'un chemin orienté γ^+ par un reparmétrage changeant l'orientation, alors

$$\int_{\gamma^-} \omega = -\int_{\gamma^+} \omega.$$

Si $U \subset \Omega$ est un ouvert, l'intégrale de la 2-forme $w(z)\, dz \wedge d\bar{z}$ sur U est la quantité

$$\int_U w(z)\, dz \wedge d\bar{z} = 2i \iint_U w(x+iy)\, dx\, dy.$$

La *différentielle extérieure* d'une 1-forme différentielle ω est la 2-forme $d\omega$ dont l'expression est

$$d\omega = \Big(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial v}{\partial z}\Big) d\bar{z} \wedge dz.$$

Lemme 2.3. *Soit ω une 1-forme différentielle de classe C^1 sur Ω. Si X est un triangle (plein), un rectangle ou un disque tels que $\bar{X} \subset \Omega$, on a la formule de Stokes*

$$\int_{\partial X} \omega = \int_X d\omega$$

le bord de X étant orienté dans le sens direct.

Remarque 2.4. La formule de Stokes est également valable pour des ouverts dont le bord est C^1 (mais la preuve est un peu plus technique).

Preuve. Il suffit de prouver la formule pour la 1-forme différentielle $u(z)dz$. En effet, par conjugaison on l'obtient pour la 1-forme $v(z)d\bar{z}$, puis par linéarité, on l'obtient pour toute 1-forme. Commençons par le cas du triangle : on note a, b, c ses sommets et on paramètre le triangle de la manière suivante

$$X \ni z = \underbrace{(1-t)a + t\big((1-s)b + sc\big)}_{=f(s,t)}, \quad (t,s) \in [0,1]^2.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\big(u \circ f\big) &= \partial_t f\, \frac{\partial u}{\partial z} \circ f + \overline{\partial_t f}\, \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \circ f \\ \frac{\partial}{\partial s}\big(u \circ f\big) &= \partial_s f\, \frac{\partial u}{\partial z} \circ f + \overline{\partial_s f}\, \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \circ f\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}2i \operatorname{Im}\big(\overline{\partial_t f}\, \partial_s f\big) \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} &= \partial_s f \frac{\partial}{\partial t}\big(u \circ f\big) - \partial_t f \frac{\partial}{\partial s}\big(u \circ f\big) \\ &= (c-b)t \frac{\partial}{\partial t}\big(u \circ f\big) - \big((b-a) + (c-b)s\big) \frac{\partial}{\partial s}\big(u \circ f\big)\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\int_X u(z)\,d\bar z\wedge dz &= 2i\iint_X \frac{\partial u}{\partial \bar z}\,dx\,dy = 2i\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \bar z}\circ f\ \operatorname{Im}\big(\overline{\partial_t f}\,\partial_s f\big)\,ds\,dt\\ &= (c-b)\int_0^1 u\circ f(s,1)\,ds-(c-a)\int_0^1 u\circ f(t,1)\,dt\\ &\quad+(b-a)\int_0^1 u\circ f(t,0)\,dt.\end{aligned}$$

La dernière somme est l'intégrale de $u(z)dz$ sur le bord du triangle orienté dans le sens trigonométrique. En décomposant un rectangle en deux triangles, il est facile de voir que la formule de Stokes est également valable pour les rectangles.

Terminons par le cas du disque. En coordonnées polaires (centrées au centre du disque X), l'expression de l'opérateur de Cauchy-Riemann est

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{e^{i\theta}}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) \tag{2.3}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\int_X u(z)\,d\bar z\wedge dz &= i\int_0^1\int_0^{2\pi}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big)e^{i\theta}\,d\theta\,dr\\ &= i\int_0^{2\pi} u\,e^{i\theta}\,d\theta - i\int_0^1\int_0^{2\pi} u\,e^{i\theta}\,d\theta\,dr + i\int_0^1\int_0^{2\pi} u\,e^{i\theta}\,d\theta\,dr\\ &= i\int_0^{2\pi} u\,e^{i\theta}\,d\theta\end{aligned}$$

cette dernière intégrale est l'intégrale de $u(z)dz$ sur le cercle orienté dans le sens trigonométrique. □

Terminons en introduisant la notion d'indice d'une courbe par rapport à un point.

Définition 2.5. L'indice *d'un lacet orienté au point z est le nombre*

$$\operatorname{Ind}(\gamma,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}.$$

Lemme 2.6. *L'indice d'un lacet orienté est un entier relatif.*

Preuve. Soit $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ une subdivision de l'intervalle $[0,1]$ en sous-intervalles où $\gamma:[t_j,t_{j+1}]$ est de classe C^1, on a

$$\operatorname{Ind}(\gamma,z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^n\Big(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{\gamma'(t)}{z-\gamma(t)}\,dt\Big).$$

Il suffit de montrer que chacun des termes de la somme appartient à $2\pi i\mathbf{Z}$. On considère la fonction

$$g(x) = \exp\Big(\int_{t_{j-1}}^{x} \frac{\gamma'(t)}{z-\gamma(t)}\,dt\Big), \quad x \in [t_{j_1}, t_j]$$

qui vérifie l'équation

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\gamma'(x)}{z-\gamma(x)}.$$

Par suite, on a $g(x) = \lambda(z-\gamma(x))$ et donc $g(t_{j-1}) = g(t_j)$, ce qui prouve que $g(t_j) = 1$. □

Lemme 2.7. *Soit γ un lacet et $\Gamma = \gamma([0,1])$ son support géométrique, l'indice est constant sur toute composante connexe de $\mathbf{C} \setminus \Gamma$, et vaut 0 sur l'unique composante connexe non bornée.*

Preuve. Par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, l'indice est continue sur $U_\varepsilon = \mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{C} : d(z,\Gamma) > \varepsilon\}$ puisque $1/|w-z| \leq 1/\varepsilon$. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, l'indice est continue sur $\mathbf{C} \setminus \Gamma$. L'indice est une fonction continue sur $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ à valeurs entières donc constante sur chaque composante connexe.

Il y a une seule composante connexe non bornée : en effet, Γ est contenu dans un disque fermé $\bar{D}$, par conséquent, l'ouvert connexe $\mathbf{C} \setminus \bar{D}$ qui est contenu dans $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ est contenu dans une composante connexe de $\mathbf{C} \setminus \Gamma$, qui est non bornée. Les autres composantes connexes sont contenues dans $\bar{D}$ et sont donc bornées. Enfin, si $|\Gamma$ désigne la longueur de Γ, on a

$$|\operatorname{Ind}(z,\gamma)| \leq \frac{|\Gamma|}{2\pi d(z,\Gamma)}, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \Gamma$$

et en faisant tendre $|z|$ vers l'infini lorsque z appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbf{C} \setminus \Gamma$, on obtient que l'indice y est nul. □

Exemple 2. On peut calculer l'indice d'un cercle par rapport à un point qui n'est pas sur le cercle

$$\operatorname{Ind}(z, C(z_0,r)) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z-z_0| > r \\ 1 & \text{si } |z-z_0| < r. \end{cases} \tag{2.4}$$

En effet, il y a deux composantes connexes de $\mathbf{C} \setminus C(z_0,r)$, sur la composante bornée l'indice est constant et vaut donc

$$\operatorname{Ind}(z, C(z_0,r)) = \operatorname{Ind}(z_0, C(z_0,r)) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{2\pi i r e^{i2\pi t}}{z_0 + re^{i2\pi t} - z_0}\,dt = 1.$$

3. Fonctions holomorphes et formule de Cauchy

Dans ce paragraphe, Ω désigne un ouvert non vide du plan complexe. Avec les notations introduites dans le paragraphe précédent, la formule de Taylor d'une fonction différentiable en $z \in \Omega$ s'écrit

$$f(z+h) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial z}(z)\, h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\, \overline{h} + o(h).$$

De cette formule, il est clair qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe, est la différentiabilité de f en $z \in \Omega$ et l'annulation de $\partial f/\partial \overline{z}(z)$. Ceci motive l'introduction de la notion d'holomorphie.

Définition 3.1. *Une fonction* holomorphe *sur* Ω *est une fonction de classe* C^1 *sur* Ω *qui vérifie l'équation de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

Pour une fonction holomorphe, on utilise la notation $f'(z) = \partial f/\partial z(z)$. *L'ensemble des fonctions holomorphes sur* Ω *forment un sous-espace vectoriel de* $C^1(\Omega)$ *que l'on note* $\mathcal{H}(\Omega)$.

Remarque 3.2. L'équation de Cauchy-Riemann peut s'écrire comme un système d'équations sur les parties réelle u et imaginaire v de f

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.1}$$

Ce qui revient à dire que la matrice jacobienne de f

$$Df = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

est la matrice d'une similitude. Notons dès à présent que l'holomorphie impose une forme de rigidité. En effet, le système (3.1) implique par exemple que les seules fonctions holomorphes à valeurs réelles ou complexes sont les fonctions constantes.

Remarque 3.3. Une définition *a priori* plus générale de l'holomorphie consiste à ne pas supposer les fonctions C^1 mais seulement différentiables. Cependant la théorie dans le cadre de cette définition n'est pas plus riche, car on montre que les fonctions holomorphes sur un ouvert selon cette définition sont en fait C^∞. La définition que l'on a choisie n'est donc pas aussi limitative qu'elle ne le parait, mais elle permet dès l'abord une marge de manoeuvre plus grande.

On peut bien sûr définir la notion d'holomorphie *en un point*. Par exemple, la fonction $|z|^2$ est holomorphe en 0, car elle vérifie l'équation de Cauchy-Riemann en 0, ou car $|h|^2/h = \overline{h} = o(h)$, mais elle n'est holomorphe sur aucun ouvert de **C**. Ce type de pathologie n'a cependant pas grand intérêt pour la suite de la théorie, autant l'ignorer dès le départ.

Exemple 3. Les polynômes $z \mapsto a_n z^n + \cdots + a_0$, l'exponentielle $z \mapsto e^z$ sont des fonctions holomorphes. Le produit et la composée de deux fonctions holomorphes sont holomorphes.

Théorème 3.4. *Soit f une fonction holomorphe sur Ω, soit D un disque tel que $\bar{D} \subset \Omega$ on a la formule suivante, dite formule de Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \quad z \in D. \tag{3.2}$$

Preuve. Soit χ une fonction C^∞ à support dans le disque $D(0,2)$ égale à 1 sur le disque $D(0,1)$, et soit $\tilde{\chi} = 1 - \chi$. La fonction

$$w \mapsto \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \tilde{\chi}\Big(\frac{w - z}{\varepsilon}\Big)$$

est de classe C^1 sur Ω et par la formule de Stokes sur le disque D, on a

$$\int_{\partial D} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, \tilde{\chi}\Big(\frac{w - z}{\varepsilon}\Big)\, dw = \\ - \frac{1}{\varepsilon} \int_D \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, \frac{\partial \chi}{\partial \bar{w}}\Big(\frac{w - z}{\varepsilon}\Big)\, d\bar{w} \wedge dw.$$

Or la fonction $\partial\chi/\partial\bar{z}$ est à support dans la couronne $D(0,2) \setminus D(0,1)$, par conséquent le terme de droite peut être majoré par

$$\sup_{\varepsilon < |z - w| < 2\varepsilon} |f(z) - f(w)| \int_D \Big|\frac{\partial \chi}{\partial \bar{w}}(w)\Big| \frac{d\bar{w} \wedge dw}{2i|w|}.$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque ε tend vers 0. Par passage à la limite, on obtient ainsi

$$\int_{\partial D} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw = 0$$

ce qui est équivalent à la formule de Cauchy d'après le calcul de l'indice d'un cercle (2.4). □

Corollaire 3.5. *Une fonction holomorphe sur Ω est de classe C^∞. De plus, ses dérivées complexes successives $f^{(n)} = \partial^n f/\partial z^n$ sont holomorphes et pour tout disque D dont l'adhérence est contenue dans Ω*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, dw, \quad z \in D.$$

Preuve. Il suffit de montrer que f est C^∞ sur tout disque dont l'adhérence est contenue dans Ω. Soit D un tel disque, la fonction $z \to 1/(w - z)$ est une

fonction C^∞ sur D lorsque $w \in \partial D$, et
$$\Big|\frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k}\Big(\frac{1}{w-z}\Big)\Big| = (j+k)!\Big|\frac{i^k}{(w-z)^{j+k+1}}\Big| \le (j+k)!\frac{1}{d(z,\partial D)^{j+k+1}}.$$
Soit $\varepsilon > 0$, et soit $D_\varepsilon = \{z \in D : d(z,\partial D) > \varepsilon\}$, lorsque $z \in D_\varepsilon$ les dérivées successives de $z \to 1/(z-w)$ sont majorées par $(j+k)!/\varepsilon^{j+k+1}$, on peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale : on obtient que f est une fonction C^∞ sur D_ε et de plus
$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw, \qquad \frac{\partial^{n+1} f}{\partial z^n \partial \bar z}(z) = 0, \qquad z \in D_\varepsilon.$$
Ces dernières formules étant vraies pour tout $\varepsilon > 0$, elles sont donc valables sur D, ce qui prouve le résultat escompté. □

Définition 3.6. *Une* primitive *d'une fonction continue f sur Ω est une fonction F holomorphe sur Ω telle que $F'(z) = f(z)$.*

Lemme 3.7. *Si une fonction continue f admet une primitive sur Ω alors pour tout lacet γ de Ω, on a*
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Preuve. Un simple calcul donne
$$\frac{\partial}{\partial t}(F\circ\gamma) = (F'\circ\gamma)\,\gamma'(t)$$
par conséquent
$$\int_\gamma f(z)\,dz = F\circ\gamma(1) - F\circ\gamma(0) = 0$$
puisque $\gamma(1) = \gamma(0)$. □

On montrera dans la section 5 qu'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé admet une primitive.

4. Conséquences de la formule de Cauchy

La formule de Cauchy permet de prouver toute une série de propriétés importantes des fonctions holomorphes.

4.1. Analyticité des fonctions holomorphes.

Définition 4.1. *Une fonction $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est dite* analytique *en $z_0 \in \Omega$ s'il existe un disque $D(z_0,r) \subset \Omega$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes tels que pour tout $z \in D(z_0,r)$ on ait*
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Une fonction analytique sur Ω est une fonction analytique en chacun des points de Ω.

Une fonction analytique sur Ω est holomorphe sur Ω. En effet, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

lorsque $|z - z_0| < r$, et par le théorème de dérivation sous le signe somme, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (z - z_0)^n = 0$$

lorsque $|z - z_0| < \rho < r$. La réciproque est également vraie.

Théorème 4.2. *Une fonction holomorphe sur Ω est analytique.*

Preuve. Soit $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$, la formule de Cauchy donne

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \quad |z - z_0| < r.$$

Or lorsque $z \in D(z_0, r)$ on a

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

puisque $|z - z_0| < r = |w - z_0|$. Ainsi, on obtient

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \right) (z - z_0)^n$$

si $|z - z_0| < r$. $\square$

Remarque 4.3. Remarquons que d'après la formule (5.1), les coefficients du développement en série entière sont $f^{(n)}(z_0)/n!$. De plus la preuve permet d'affirmer que le rayon de convergence de cette série est supérieur à r tant que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$.

L'analyticité des fonctions holomorphes a pour conséquence que ces fonctions vérifient le principe des zéros isolés.

Théorème 4.4. *Soit f une fonction holomorphe sur Ω, et soit z_0 un zéro de f, seule une des alternatives suivantes peut se produire*

(1) *z_0 est un point isolé dans l'ensemble des zéros de f,*

(2) *f est identiquement nulle au voisinage de z_0.*

Preuve. Supposons que f n'est pas identiquement nulle au voisinage de z_0 ; sur un disque $D(z_0,r)\subset\Omega$, f peut s'écrire

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=a_p(z-z_0)^p\Big(1+\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n+p}(z-z_0)^n\Big)$$

où a_p est le premier coefficient non nul du développement en série entière de f au voisinage de z_0. Il est clair que dans un voisinage suffisamment petit de z_0, f ne s'annule qu'en z_0. □

Théorème 4.5. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω, si l'ensemble des zéros de f admet un point d'accumulation alors f est identiquement nulle.*

Preuve. On considère l'ouvert suivant

$$Z=\big\{z\in\Omega:\ \text{il existe un voisinage } V \text{ de } z \text{ tel que } f|_V=0\big\}.$$

Cet ouvert est non vide, il contient les points d'accumulations de l'ensemble des zéros de f d'après le théorème 4.4. Montrons que Z est également fermé : soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de Z convergeant vers $z\in\mathbf{C}$, alors z est un point d'accumuation de l'ensemble des zéros de f et appartient donc à Z. Comme l'ouvert Ω est connexe, on a forcément $\Omega=Z$. □

4.2. Théorème de Liouville.

Théorème 4.6. *Soit f une fonction holomorphe sur Ω, supposons que l'adhérence du disque $D(z,R)$ soit contenu dans Ω. La fonction f vérifie les* inégalités de Cauchy

$$|f^{(n)}(z)|\le\frac{n!}{R^n}\sup_{w\in C(z,R)}|f(w)|.$$

Preuve. On utilise la formule (5.1)

$$|f^{(n)}(z)|\le\frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(z+Re^{i\theta})|}{R^{n+1}}R\,d\theta\le\frac{n!}{R^n}\sup_{w\in C(z,R)}|f(w)|.$$

Ce qui donne les inégalités de Cauchy. □

Théorème 4.7 (Cauchy). *Une fonction* entière, *i.e. holomorphe sur* $\mathbf{C}$, *bornée est constante.*

Preuve. On utilise l'inégalité de Cauchy : si f est entière et bornée, on a

$$|f'(z)|\le\frac{1}{R}\sup_{w\in C(z,R)}|f(w)|\le\frac{1}{R}\sup_{w\in\mathbf{C}}|f(w)|$$

pour tout $z\in\mathbf{C}$. En faisant tendre R vers l'infini, on obtient $f'(z)=0$. Ainsi $\partial f/\partial\bar z=\partial f/\partial z=0$, ce qui implique que f est constante. □

4.3. Principe du maximum.

THÉORÈME 4.8. *Le module d'une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe Ω ne peut atteindre un maximum en un point de Ω.*

PREUVE. Supposons que le module d'une fonction holomorphe sur Ω atteigne un maximum en $z_0 \in \Omega$; il existe un disque $D(z_0, r)$ contenu dans Ω, la formule de Cauchy sur tout cercle $C(z_0, \rho)$, $\rho \leq r$, donne

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| \, d\theta \leq |f(z_0)|$$

ce qui implique

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|}_{\geq 0} \, d\theta = 0$$

et par conséquent $|f(z)| = |f(z_0)|$ pour tout $z \in D(z_0, r)$. En différentiant $|f(z)|^2 = |f(z_0)|^2$, on obtient

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{f} + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} f = \overline{f'} f$$

ainsi $f' = 0$ et donc $f = f(z_0)$ sur $D(z_0, r)$. Le principe des zéros isolés appliqués à $f - f(z_0)$ permet de conclure. □

COROLLAIRE 4.9. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe borné, continue sur $\bar{\Omega}$, on a*

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

4.4. Théorème de Morera.

THÉORÈME 4.10. *Soit Ω un ouvert étoilé. Une fonction continue sur Ω dont l'intégrale curviligne le long de tout triangle contenu dans Ω est nulle, admet une primitive sur Ω. En particulier, cette fonction est holomorphe.*

PREUVE. Supposons que Ω soit étoilé par rapport à $z_0 \in \Omega$, on considère le candidat naturel pour une primitive d'une fonction continue f

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(w) \, dw.$$

Le triangle de sommets $z_0, z, z + h$ est contenu dans Ω si h est assez petit, par conséquent l'intégrale le long de ce triangle est nul :

$$\int_{[z_0, z]} + \int_{[z, z+h]} + \int_{[z+h, z_0]} f(w) \, dw = 0$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(w) \, dw = f(z) + \int_{[z, z+h]} \frac{f(w) - f(z)}{h} \, dw.$$

L'intégrale du terme de droite tend vers 0 lorsque h tend vers 0 puisqu'elle peut être estimée de la manière suivante

$$\Big| \int_{[z,z+h]} \frac{f(w)-f(z)}{h}\, dw \Big| \leq \sup_{[z,z+h]} |f|.$$

Ceci prouve que F est holomorphe et que $F'(z) = f$. La seconde assertion découle du fait que la dérivée d'une fonction holomorphe est elle-même holomorphe. $\square$

4.5. Principe de réflexion de Schwarz. Soit Ω un ouvert symétrique par rapport à l'axe réel, i.e.

$$z \in \Omega \Leftrightarrow \bar{z} \in \Omega$$

on note

$$\Omega_\pm = \Omega \cap \{z \in \mathbf{C} : \pm \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \Omega_0 = \Omega \cap \mathbf{R}.$$

Lemme 4.11. *Soient $f^\pm$ deux fonctions holomorphes sur $\Omega^\pm$ qui se prolongent par continuité à Ω_0 de sorte que*

$$f^+(x) = f^-(x), \quad \forall x \in \Omega_0.$$

La fonction définie de la manière suivante

$$f(z) = \begin{cases} f^+(z) \ \text{si } z \in \Omega_+ \\ f^\pm(z) \ \text{si } z \in \Omega_0 \\ f^-(z) \ \text{si } z \in \Omega_- \end{cases}$$

est holomorphe sur Ω.

Preuve. Il suffit de prouver que f est holomorphe aux points de Ω_0. Soit $z_0 \in \Omega_0$ et D un disque centré en z_0 dont l'adhérence est contenue dans Ω. D'après le théorème de Morera, il s'agit de montrer que l'intégrale curviligne de f le long de tout triangle (plein) T contenu dans D est nulle.

Si T est tout entier contenu dans $\Omega_\pm$, c'est une conséquence de la formule de Stokes sur un triangle puisque la différentielle extérieure de $f(z)\, dz$ est

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\, d\bar{z} \wedge dz = 0.$$

Si $T \cap \Omega_0 = \{a\}$ et par exemple $T \setminus \{a\} \subset \Omega_+$, on note b, c les deux autres sommets et on considère T_ε le triangle de sommets a_ε, b, c avec $a_\varepsilon = a + \varepsilon(b-a)$, $\varepsilon \in]0,1[$. On a alors $T_\varepsilon \subset \Omega_+$ et d'après le premier cas

$$\int_{\partial T_\varepsilon} f(z)\, dz = 0$$

puis on passe à la limite lorsque ε tend vers 0. L'intégrale curviligne le long de ∂T_ε converge vers l'intégrale le long de ∂T grâce au théorème de convergence dominée puisque f est continue sur Ω, on conclut donc que l'intégrale de f le long de ∂T est nulle. Enfin, si $T \cap \Omega_0$ est un segment, on peut décomposer T en deux triangles T_+ et T_- contenus respectivement dans $\Omega_+ \cup \Omega_0$ et dans $\Omega_- \cup \Omega_0$ (cf. figure

4.5). Chacun de ces triangles a un coté dans Ω_0 ; considérons par exemple T_+ de sommets a, b dans Ω_0 et c dans Ω_+, on l'approche par le triangle T_ε^+ de sommets $a_\varepsilon, b_\varepsilon, c$ avec $a_\varepsilon = a + \varepsilon(c-a)$ et $b_\varepsilon = b + \varepsilon(c-b)$. Comme $T_\varepsilon^+ \subset \Omega_+$, un argument de passage à la limite similaire au précédent permet de conclure que l'intégrale de f le long de T^+ est nulle. $\square$

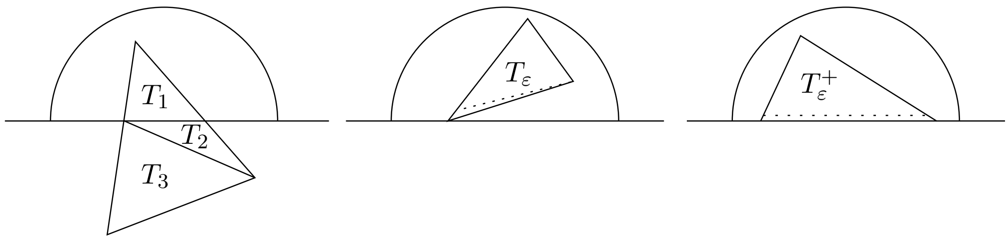

FIG. 1.

THÉORÈME 4.12. *Soit f une fonction holomorphe sur Ω_+ qui se prolonge par continuité sur Ω_0 en prenant des valeurs réelles, il existe alors une fonction holomorphe F sur Ω telle que $F|_{\Omega_+} = f$.*

PREUVE. On définit $F_\pm$ de la manière suivante

$$F_+(z) = f(z) \text{ pour tout } z \in \Omega_+, \quad F_-(z) = \overline{f(\bar{z})} \text{ pour tout } z \in \Omega_-.$$

Les fonctions $F_\pm$ sont holomorphes sur $\Omega_\pm$ puisque

$$\frac{\partial F_-}{\partial \bar{z}}(z) = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}(\bar{z}) = 0, \quad z \in \Omega_-$$

et de plus $F_+ = F_- = f$ sur Ω_0 puisque f y prend des valeurs réelles. Il suffit alors d'appliquer le lemme 4.11. $\square$

5. Théorème de Goursat

THÉORÈME 5.1 (Goursat). *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}$, et soit T un triangle plein contenu dans Ω, on a*

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0.$$

Ce résultat reste vrai si f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$ et continue sur Ω.

PREUVE. La différentielle extérieure de la 1-forme $f(z)dz$ est

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\, d\bar{z} \wedge dz = 0$$

la formule de Stokes pour un triangle implique donc le résultat désiré.

Pour prouver la deuxième assertion, on commence par supposer que a est un sommet du triangle T. On note b, c les deux autres sommets et on considère T_ε le triangle de sommets a_ε, b, c avec $a_\varepsilon = a+\varepsilon(b-a)$, $\varepsilon \in]0,1[$. On a alors $T_\varepsilon \subset \Omega\setminus\{a\}$ et d'après la première assertion

$$\int_{\partial T_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$$

puis on passe à la limite lorsque ε tend vers 0. L'intégrale curviligne le long de ∂T_ε converge vers l'intégrale le long de ∂T grâce au théorème de convergence dominée puisque f est continue sur Ω. Enfin, si a est n'est pas l'un des sommets, on peut se ramener à ce cas en décomposant T en deux ou trois triangles selon que a est situé sur l'un des côtés ou à l'intérieur du triangle (cf. figure 5). $\square$

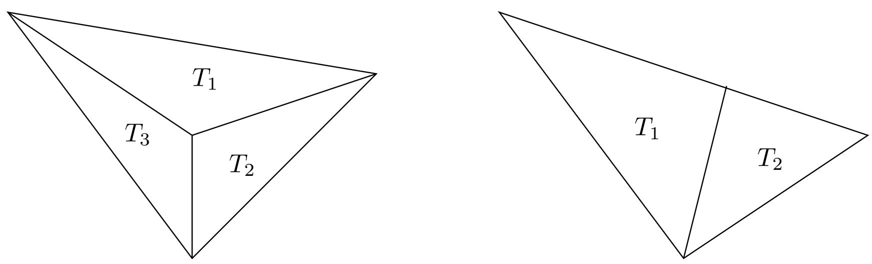

FIG. 2. Décompositions des triangles

COROLLAIRE 5.2. *Une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé admet une primitive.*

PREUVE. Le théorème de Goursat permet d'affirmer que l'intégrale d'une fonction holomorphe le long de tout triangle de Ω est nul, d'après le théorème de Morera, cela suffit à dire que la fonction f admet une primitive sur Ω. $\square$

Ce résultat s'applique en particulier aux disques. Cela implique l'existence *locale* d'une primitive. En effet, si f est une fonction holomorphe sur un ouvert Ω, si $z_0 \in \Omega$, alors l'ouvert Ω contient un disque $D(z_0, \varepsilon)$ suffisamment petit, et sur ce disque f admet une primitive d'après le théorème précédent. Une conséquence du corollaire 5.2 et du lemme 3.7 est le résultat suivant, très utile pour calculer certaines intégrales.

COROLLAIRE 5.3. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé et soit γ un lacet de Ω, on a*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Exemple 4. La transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi}\, dx = e^{-\pi\xi^2}.$$

En effet, la fonction $z \to e^{-\pi z^2}$ est entière, son intégrale le long du bord du rectangle $[-R, R, R+i\xi, -R+i\xi]$ orienté dans le sens trigonométrique, est nulle

$$0 = \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}\, dx - \int_{-R}^{R} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\, dx + 2\underbrace{\operatorname{Im}\int_0^1 e^{-\pi(R+it\xi)^2} dt}_{=\mathcal{O}(e^{-\pi R^2})}.$$

En passant à la limite lorsque R tend vers l'infini, on obtient donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\, dx = 1.$$

Terminons avec une forme un peu plus générale de la formule de Cauchy.

Théorème 5.4. *Soit Ω un ouvert étoilé. Soit f une fonction holomorphe sur Ω, soit γ un lacet de Ω, on a la formule suivante, dite formule de Cauchy*

$$f(z)\operatorname{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw. \tag{5.1}$$

Preuve. On considère la fonction suivante

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{z-w} & \text{si } w \neq z \\ f'(z) & \text{si } w = z \end{cases}.$$

Cette fonction est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$. D'après le théorème de Goursat, l'intégrale de g le long de tout triangle est nul, ce qui implique d'après le théorème 4.10 que g admet une primitive sur Ω. Ceci a pour conséquence que

$$\int_\gamma g(w)\, dw = 0$$

pour toute courbe γ de Ω d'après le lemme 3.7. Ceci est le résultat recherché. $\square$