Fonctions holomorphes

Exercice 1

Montrer qu'il n'existe pas d'ordre total sur $\mathbf{C}$ compatible avec les opérations d'addition et de multiplication (Tester $i \geq 0$).

Exercice 2

Dans cet exercice, on veut définir l'exponentielle et établir quelques unes de ces propriétés les plus remarquables.

1. Montrer la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$ converge pour tout $z \in \mathbf{C}$. On note e^z sa somme, l'exponentielle est la fonction $\exp : z \mapsto e^z$.

2. Montrer que $e^{z+w} = e^z e^w$. En déduire $|e^{i\theta}|^2 = 1$.

3. On définit $\cos\theta$ et $\sin\theta$ comme étant les parties réelles et imaginaires de $e^{i\theta}$. Montrer que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Montrer que $\theta \mapsto \cos\theta$ s'annule entre 0 et 2.

4. On définit $\pi/2$ comme étant le plus petit des zéros dans $[0, 2]$. Montrer que $e^{i\pi/2} = i$. Montrer que les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques, et calculer leurs dérivées.

5. Montrer que pour tout nombre complexe w de module 1, il existe un unique nombre $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $w = e^{i\theta}$.

Exercice 3

Montrer qu'une série entière est analytique sur son disque de convergence.

Exercice 4

1. Une fonction holomorphe peut-elle être à valeurs sur un cercle ?

2. Montrer que les lignes de niveau des parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe non constante sont orthogonales.

Exercice 5

On considère la fonction suivante

$$F(z, w) = \frac{w - z}{1 - \bar{w}z}, \qquad \text{si } \bar{w}z \neq 1.$$

1. Montrer que

$$F(z, w) < 1 \quad \text{si } |w| < 1,\ |z| < 1 \qquad \text{et} \qquad F(z, w) = 1 \quad \text{si } |w| = 1 \text{ ou } |z| = 1.$$

2. On considère la fonction $F_w : z \mapsto F(z, w)$ lorsque w est un nombre fixé du disque unité. Montrer que F_w envoie le disque unité dans lui même, que $|F_w(z)| = 1$ lorsque $|z| = 1$ et que F_w échange w et 0.

3. Montrer que F_w est holomorphe et bijective (calculer $F_w \circ F_w$).

Exercice 6

Le but de cet exercice est de donner une preuve alternative du théorème de Goursat, qui ne fasse pas intervenir le caractère C^1 des fonctions holomorphes. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω et soit T un triangle plein contenu dans Ω.

1. On décompose le triangle T en 4 triangles en joigant les milieux des côtés de T. Faire un dessin. Montrer qu'il existe un triangle T_1 parmi ces quatre triangles tel que
$$\Big|\int_{\partial T} f(z)\,dz\Big| \leq 4\Big|\int_{\partial T_1} f(z)\,dz\Big|.$$
2. Itérer le processus et montrer qu'il existe une suite de triangles T_n tels que
$$\Big|\int_{\partial T} f(z)\,dz\Big| \leq 4^n\Big|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz\Big|.$$
Comment évoluent le périmètre et le diamètre de T_n ?
3. Montrer que l'intersection des triangles T_n est réduite à un point z_0. En écrivant la formule de Taylor en z_0, montrer que
$$\int_{\partial T_n} f(z)\,dz = \int_{\partial T_n} (z - z_0)\varepsilon(z)\,dz$$
où ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque z tend vers z_0. En déduire une majoration du module de l'intégrale de gauche.
4. Conclure.

Exercice 7

1. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. On peut calculer l'intégrale de e^{iz}/z sur le chemin[1] constitué par la réunion des deux demi-cercles du demi-plan supérieur de centre l'origine et de rayons R et $\varepsilon < R$ et des segments $[-R, -\varepsilon]$ et $[\varepsilon, R]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$. On pourra calculer l'intégrale de e^{-z^2} sur un secteur angulaire.

Exercice 8

1. Soit f une fonction entière. Montrer la formule suivante pour $|z| < R$
$$f(z) - f(0) = \frac{z}{2\pi i}\int_{C(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}\,d\zeta$$
où $C(0, R)$ est le cercle de centre 0 et de rayon $R > 0$ orienté dans le sens direct.
2. Prouver la variante suivante du théorème de Liouville : si f entière vérifie
$$\sup_{R>0}\int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|\,dt \leq M < +\infty$$
alors f est constante.

[1]Avec le résultat donné dans le cours sur les ouverts étoilés, il faut ruser un peu plus.