TP 4 - Projets déterministes - MACS 1 - 2009/2010

D. Nicolas - 19 mars 2010

Dans ce TP nous allons implémenter différentes méthodes de résolution d'équations différentielles et voir l'application au pendule pesant. Les codes et un rapport LaTeX de vos résultats sont à rendre compactés avant le dimanche 28 mars à minuit à *dimi.nicolas@gmail.com*. Si vous avez des questions, ne pas hésiter a m'envoyer un email.

1 Introduction

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & f(t, y(t)) \quad , \quad 0 \leq t \leq T \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est régulière et $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Remarquons que l'on a en fait un système d'équations différentielles. Pour approximer numériquement la solution de ce système nous allons implémenter différentes méthodes . Notons h le pas de la subdivision uniforme $(t_n)_{t=0}^N$ de l'intervale $[0, T]$. Donc on a $t_n = nh$. Notons y_n une approximation de $y(t_n)$ pour $n \in \{0, 1, ..., N\}$

2 La méthode d'Euler

2.1 Euler Explicite

La méthode d'euler explicite s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \tag{1}$$

1) Retrouver, par un raisonnement formel, comment ce schéma a été obtenu.

2) Implémenter cette méthode.

3) Faire quelques cas tests sur des exemples simples. Remarquer qu'il se pose des problèmes lorsque le pas h devient trop grand.

4) Tracer les courbes d'erreur de la méthode en échelle log-log et déterminer l'ordre de cette méthode : on tracera $log(e(h)) = log(\|y_h - y\|)$ en fonction de $log(h)$ où y_h désigne la solution approchée sur $[0, T]$ pour un certain pas h et y la solution exacte (ou du moins une solution très précise). On peut aussi utiliser l'erreur de consistance suivante (rappel : $h = \frac{1}{N}$) :

$$e(h) = \max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)|$$

2.2 Euler Implicite

La méthode d'euler implicite s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \tag{2}$$

1) Remarquer que pour cette méthode il est nécessaire de résoudre un système à chaque étape. Remarquer de plus que si f est non linéaire alors ce système devient nécessaire.

2) Implémenter la méthode de Newton de recherche du zéro d'un système d'équation. La tester sur des cas simples de votre choix. **Rappel :** Pour trouver le zéro d'un fonction vectorielle $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ il faut résoudre itérativement le problème suivant :

$$F'(s_n)(s_{n+1}-s_n) \quad = \quad -F(s_n) \tag{3}$$

avec $F'(s_n)$ matrice jacobienne de F en s_n.

3) Retrouver, par un raisonnement formel, pourquoi l'on doit résoudre le système (3)

4) Implémenter la méthode d'euler implicite

5) Faire quelques cas tests sur des exemples simples. Se pose-t-il le même problème qu'avec Euler explicite si le pas h devient trop grand ?

6) Tracer les courbes d'erreur de la méthode en échelle log-log et vérifier que l'ordre de cette méthode est le même que pour euler explicite.

2.3 Problème raide

Voici un exemple de problème raide (stiff problem). Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & -\lambda y + 1 + \lambda t \quad , \quad 0 \leq t \leq T \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

1) Calculer la solution exacte.

2) Prendre $\lambda = 600$. Comparer les méthodes d'euler explicite et implicite lorsque $h = 0.01$ et $h = 0.001$.

3) En déduire un avantage de la méthode implicite sur la explicite. Ce problème est appelé "raide" car il nécessite un pas très petit pour converger avec du explicite.

3 La méthode de Runge-Kutta 4

La méthode de Runge-Kutta 4 s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} k_1^n & = & f(t_n, y_n) \\ k_2^n & = & f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1^n) \\ k_3^n & = & f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2^n) \\ k_4^n & = & f(t_{n+1}, y_n + hk_3^n) \\ y_{n+1} & = & y_n + \frac{h}{6}(k_1^n + 2k_2^n + 2k_3^n + k_4^n) \end{array} \tag{4}$$

1) Implémenter cette méthode.

2) Faire quelques cas tests sur des exemples simples. Remarquer qu'il se pose des problèmes lorsque le pas h devient trop grand.

3) Tracer les courbes d'erreur de la méthode en échelle log-log et déterminer l'ordre de cette méthode.

4) Résoudre le problème raide précédent en utilisant les mêmes données mais avec la méthode de RK4. Que remarque-t-on ?

4 La méthode de Crank-Nicolson

La méthode de Crank-Nicolson s'écrit :

$$\begin{array}{r} y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}) \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}) \end{array} \tag{5}$$

1) Implémenter cette méthode. (méthode implicite donc utilisant la méthode de Newton précédemment implémentée)

2) Faire quelques cas tests sur des exemples simples.

3) Tracer les courbes d'erreur en échelle log-log et montrer que la méthode est d'ordre 2.

4) Résoudre le problème raide précédent en utilisant les mêmes données mais avec la méthode de Crank-Nicolson. Que remarque-t-on ?

5 Application au pendule pesant

Considérons un pendule constitué d'une masse ponctuelle **m** au bout d'une tige de masse nulle et de longueur **L**, tournant sans frottement autour de l'axe orienté dirigé par un vecteur horizontal **e**, et soumis à la pesanteur **g** supposée uniforme. On note θ l'angle que la tige fait avec la verticale et $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire de la tige.

1) Dessiner le problème (En LaTeX on pourra utiliser LaTeXDraw).

2) Montrer que l'energie totale s'écrit :

$$E_T = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos(\theta))$$

3) Sachant que l'énergie totale se conserve, dériver l'expression pour obtenir l'équation de mouvement.

4) Décomposer cette équation différentielle du second ordre en un système d'équation différentielle du premier ordre. On notera $y_1 = \theta$, $y_2 = \dot{\theta}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

5) Résoudre le problème du pendule pesant sur un exemple de votre choix avec les conditions initiales de votre choix.

6) Représenter l'évolution de la trajectoire dans l'espace des phases (i.e. tracer y_2 en fonction de y_1) lorsque la position initiale est $\frac{\pi}{2}$ et la vitesse initiale vaut 0.2. Augmenter la vitesse initiale jusqu'à avoir un portrait de phase différent. Que veut dire ce nouveau portrait de phase par rapport au précédent ?

7) Tracer l'évolution du portrait de phase lorsque la position initiale varie et la vitesse initiale est nulle. Dire quelles sont les positions "stables" (le pendule oscille indéfiniment sans faire le tour du point d'accrochage) et "instables" (le pendule tourne indéfiniment autour du point d'accrochage)

8) Regardons le cas ou le pendule est amorti. L'équation s'écrit alors avec le coefficient d'amortissement α :

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin(\theta) - \alpha \dot{\theta} \quad (6)$$

9) Tracer un portrait de phase en tenant compte de l'amortissement. Commenter.