TP 3 - Projets déterministes - MACS 1 - 2009/2010

D. Nicolas - 12 février 2010

Dans ce TP nous allons implémenter différentes méthodes d'intégration numérique et les appliquer à des calculs d'intégrales généralisées, à l'extension de la factorielle et au tracé de la fonction Γ. Les codes et un rapport LaTeX de vos résultats sont à rendre compactés avant le dimanche 28 février à minuit à *dimi.nicolas@gmail.com*. Si vous avez des questions, ne pas hésiter a m'envoyer un email.

1 Méthodes de Newton-Cotes

Les méthodes de Newton-Cotes sont les méthodes d'intégration numérique du type :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i)$$

1) Expliciter les formules d'intégration numérique de la méthode des rectangles (autrement appelée méthode des escaliers), du point milieu, du trapèze, et de Simpson 1/3 et 1/8.

2) Implémenter ces méthodes en matlab. (chaque fonction d'intégration numérique devra prendre en arguments d'entrée l'intervalle sur lequel on intégre, le nombre de discrétisation de l'intervalle et la fonction que l'on souhaite intégrer et en argument de sortie la valeur de l'intégrale). Ne pas oublier les commentaires.

3) Tester ces méthodes sur des exemples de votre choix. On créera au moins autant de script de test que de méthodes à tester (plus si affinités).

4) Tracer les courbes d'erreur pour chacune des méthodes en log-log (on pourra tracer sur les mêmes graphes des droites de différents ordres pour identifier les ordres). Il faut donc tracer la norme de l'erreur en fonction du nombre de discrétisation de l'interval (il faudra donc lancer le calcul de l'intégral avec des discrétisations de plus en plus fines : typiquement on double les discrétisations à chaque fois, donc on divise par deux le pas de discrétisation). Vérifier que les ordres obtenus correspondent aux ordres théoriques et vérifier sur des exemples appropriés l'exactitude de méthodes (ex : une méthode d'ordre 1 est exacte lorsque l'on intégre exactement des polynômes d'ordre 0).

2 Calculs d'intégrales généralisées

On va appliquer les méthodes précédentes de calcul d'intégrales sur différents exemples :

1) Tester vos codes sur des fonctions fortement oscillantes (par rapport à l'intervalle de discrétisation) ; puis commenter les résultats.

2) Calculer numériquement l'intégrale suivante en fixant R à 1 :

$$I = \int_0^R e^{-x^2} dx$$

3) Calculer explicitement l'intégrale précédente lorsque $R \longrightarrow +\infty$ et vérifier que l'on y converge bien numériquement.

4) Calculer explicitement et numériquement l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

5) Vérifier numériquement que pour $\gamma < 1$ l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx$$

3 Extension de la factorielle

On définit la fonction Γ par la formule suivante pour $m \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx$$

1) Calculer pour $m = 0, 1, 2, 3, 4, ...$ une approximation de $\Gamma(m+1)$. Conjecturer une formule simple pour $\Gamma(m+1)$.

2) Calculer $\Gamma(m+1)$ en fonction de $\Gamma(m)$. En déduire par récurrence une expression simple de $\Gamma(m+1)$. Remarquons que cette formule est valable seulement pour m entier positif ou nul.

3) Etendons la factorielle aux réels strictement positifs. Pour ce faire, tracer $\Gamma(m)$ pour $m \in]0, 5]$.

4) Etendons la définition de la factorielle à des réels négatifs. Pour ce faire, tracer la fonction Γ sur $[-5, 5]$, en remarquant que $\Gamma(m)$ n'est pas intégrable pour m entier négatif ou nul.

4 Tracé de Γ dans le plan complexe

On dispose toujours de la fonction $\Gamma = \Gamma(z)$, définie lorsque $z \in \mathbb{C}$ sauf lorsque $Im(z) = 0$ et $Re(z) = -k$, $k \in \mathbb{N}$ (pôles où l'intégrale diverge).

1) Décomposer Γ sous la forme $a + ib$.

2) Ecrire une fonction qui calcul Γ pour tout nombre complexe. La fonction prendra en argument d'entrée les bornes d'intégration et le nombre complexe et en argument de sortie la valeur complexe de l'intégrale (ou bien ses parties réelles et imaginaires)

3) En remarquant que $|\Gamma(\bar{z})| = |\Gamma(z)|$ (ce qui permettra d'alléger les calculs pour le tracé) tracer le module de la fonction Γ dans le plan complexe.
(i.e. en fonction de $Re(z)$ et $Im(z)$ sur $[-5, 5] \times [-5, 5]$ par exemple).