TP 2 - Projets déterministes - MACS 1 - 2009/2010

D. Nicolas - 5 février 2010

Dans ce TP nous allons implémenter deux méthodes dites itératives de résolution de systèmes linéaires : à savoir Jacobi et Gauss-Seidel. Les codes et un rapport LaTeX de vos résultats sont à rendre compactés avant le dimanche 14 février à minuit à *dimi.nicolas@gmail.com*. Si vous avez des questions, ne pas hésiter a m'envoyer un email.

1 Idée

On cherche à résoudre $Ax = b$ via la construction d'une suite x_k qui tende vers x lorsque $k \to \infty$. On étudie ici des méthodes itératives basés sur la décomposition (M, N) définie par $A = M - N$, avec M facilement inversible. Ainsi, si $Ax = b$ alors on a $Mx = Nx + b$ et l'algorithme itératif sera :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{K}^n \\ Mx_{k+1} = Nx_k + b \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{K}^n \\ x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b) \end{cases}$$

2 Jacobi

Pour préciser cette méthode il suffit de préciser la décomposition (M, N). Soit $A = (a_{ij})$, on définit $D = a_{ij}\delta_{ij} = M$. Donc $N = M - A = D - A$. On suppose donc implicitement que $\forall i \; a_{ii} \neq 0$. (sinon M n'est plus inversible)

Lemme 1. *Soit A hermitienne définie positive (ou négative) et $2D - A$ définie positive (ou négative), alors la méthode de Jacobi converge. A savoir : si A est à diagonale strictement dominante sur les lignes alors Jacobi converge aussi.*

1) Ecrire la relation liant x_{k+1} à x_k.

2) Ecrire ce que vaut $x_{k+1,i}$ en fonction de $x_{k,i}$ (où $x_{k,i}$ représente la composante i à l'étape k).

3) Calculer le coût par itération de cette méthode.

On note le vecteur erreur à l'étape k : $e_k = x_k - x$. On note r_k le résidu à l'étape k définit de la manière suivante : $r_k = Ax_k - b$

4) Ecrire le Pseudo-code de l'algorithme de Jacobi avec comme critère d'arrêt $\frac{\|r_k\|}{\|b\|} < \epsilon$. Pourquoi ce critère d'arrêt est légitime (formellement) ?

5) Implémenter l'algorithme en matlab (sans oublier les commentaires). Changer le critère d'arrêt et utiliser $\| \tilde{e}_k \| = \| x_k - x_{k-1} \| < \epsilon$. Comparer. Ce critère est-il légitime ?

6) Tester votre code sur des exemples de votre choix. Tracer l'erreur (norme du vecteur erreur) à l'étape k en fonction des itérations. On pourra aussi tester le cas où A est seulement à diagonale strictement dominante.

Sur la vérification de l'ordre de la méthode : une méthode est dite d'ordre p si $\forall k$

$$\frac{\| e_{k+1} \|}{\| e_k \|^p} \leq C$$

en passant au log cette expression on obtient :

$$log(\| e_{k+1} \|) = log(C) + p \times log(\| e_k \|)$$

ainsi en plaçant $Y = log(\| e_{k+1} \|)$ en ordonnée et $X = log(\| e_k \|)$ en abscisse, on doit pouvoir observer une droite de pente p.

7) Vérifier l'ordre de la méthode en traçant Y en fonction de X.

3 Gauss-Seidel

Précisons la décomposition (M, N). On pose $A = D - E - F$ où D est la diagonale de A, $-E$ est la partie triangulaire inférieure de A et $-F$ sa partie supérieure. On pose $M = D - E$ et $N = F$ donc on a $A = M - N$. On suppose aussi ici que $\forall i \ a_{ii} \neq 0$.

Lemme 2. *Soit A hermitienne définie positive (ou négative), alors la méthode de Gauss-Seidel converge.*

1) Ecrire la relation liant x_{k+1} à x_k.

2) Ecrire ce que vaut $x_{k+1,i}$ en fonction de $x_{k,i}$. (légèrement plus dur que pour Jacobi)

3) Calculer le coût par itération de cette méthode.

4) Ecrire le Pseudo-code de l'algorithme de Gauss-Seidel.

5) Implémenter l'algorithme en matlab (sans oublier les commentaires).

6) Tester votre code sur des exemples de votre choix (on pourra prendre A tridiagonale par exemple). Tracer l'erreur à l'étape k en fonction des itérations. Vérifier l'ordre de la méthode de la même manière que pour Jacobi.

7) Quelle méthode converge plus rapidement ? Jacobi ou Gauss-Seidel ?

4 Bonus : recherche

1) Se renseigner sur la *méthode itérative de relaxation SOR (Successive over-relaxation)*. Poser le problème en explicitant toutes les données (comme on vient de le faire pour Jacobi et Gauss-Seidel), coder la méthode, la tester, vérifier l'ordre de la méthode. Ne pas oublier de citer la source utilisée.