TP 1 - Projets déterministes - MACS 1 - 2009/2010

D. Nicolas - 29 janvier 2010

Le but de ce TP est double : savoir résoudre un système linéaire $Ax = b$ par une décomposition LU et l'utiliser entre autre pour résoudre un problème des moindres carrés (lorsque $b \notin Im(A)$ ou $A \in \mathbb{R}^{n,p}$ avec $n \neq p$). Les codes et un rapport LaTeX de vos résultats sont à rendre compactés avant le dimanche 7 février à minuit à *dimi.nicolas@gmail.com*. Si vous avez des questions, ne pas hésiter a m'envoyer un email.

1 Décomposition LU

Proposition 1. *Soit $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ telle que toutes ces sous-matrices soient inversibles, alors il existe un unique couple (L, U) tel que $A = LU$ avec L matrice triangulaire inférieure avec une diagonale unité et U matrice triangulaire supérieure. Typiquement il suffit que A soit symétrique définie positive pour que toutes les sous-matrices soient inversibles.*

Calcul explicite de la décomposition LU :
On utilise une méthode par identification, c'est à dire que l'on va calculer les $l_{i,j}$ et $u_{i,j}$ en identifiant terme à terme A et LU.

1) Ecrire ce que vaut $a_{i,j}$ coefficient (i, j) de $A = LU$

2) Que vaut $l_{i,k}$ lorsque $k \geq i+1$? Que vaut $u_{k,j}$ lorsque $k \geq j+1$? Réécrire la somme $a_{i,j}$ en conséquence.

3) Calcul sur la première colonne : que vaut $a_{i,1}$? En déduire $l_{i,1}$.

4) Calcul sur les colonnes j $(2 \leq \ j \leq n)$: on suppose connues les colonnes de L et U pour k allant de 1 à $j-1$. Ecrire ce que vaut $a_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq j$ puis pour $j+1 \leq i \leq n$. En déduire $u_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq j$ et aussi $l_{i,j}$ pour $j+1 \leq i \leq n$.

5) On dispose maintenant de toutes les informations nécessaires pour l'implémentation numérique. Ecrire le pseudo-code de l'algorithme de décomposition LU.

6) Implémenter la décomposition en matlab. (Ne pas oublier de commenter son code)

7) On veut donc résoudre $LUx = b$. On résout tout d'abord $Ly = b$ puis $Ux = y$. Implémenter (si ce n'est déjà fait) un algorithme de descente (résolution de $Ly = b$) et un algorithme de montée (résolution de $Ux = y$).

8) Tester vos codes pour résoudre le système $Ax = b$ en combinant tout ce qui précède sur des exemples de votre choix.

9) Vérifier que $\| Ax - b \|$ est de l'ordre du epsilon machine (commande matlab *eps*). Comparer vos résultats avec l'opérateur matlab de division matrice-vecteur (syntaxe $x = A\backslash b$ pour résoudre $Ax = b$)

2 Moindres carrés

Proposition 2. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n,p}$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Le problème aux moindres carrés $\| Ax - b \| = \min_{y \in \mathbb{R}^p} \| Ay - b \|$ admet au moins une solution. De plus cette solution est unique si et seulement si $Ker(A) = \{0\}$*

Lemme 1. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n,p}$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Alors $x \in \mathbb{R}^p$ est solution du problème de moindre carré précédent si et seulement si x est solution de ${}^tAAx = {}^tAb$. Cette dernière équation est dite "équation normale". Remarque : ${}^tAA \in \mathbb{R}^{p,p}$.*

1) Construire une matrice A de taille $n > p$ tel que $Ker(A) = \{0\}$. Construire un vecteur b de taille n tel que $b \notin Im(A)$. Implémenter et tester vos codes pour $p = 2$ et $p = 3$.

2) Utiliser votre imagination pour construire trois problèmes de moindres carrés pour approcher un nuage de points avec : une droite, une parabole puis une courbe cubique (nuage de points différent selon les cas) puis résoudre ces problèmes avec vos codes. Tracer dans chaque cas le nuage de points et la courbe de moindres carrés.