



**INGENIEURS DE L'INSTITUT GALILEE**

**Spécialité : MACS**

**Première année (G3SM)**

*Ingénieurs de l'institut scientifique et polytechnique dit "institut Galilée"*



**2005/2006**

# Magnétisme

**Michel Labrune,**  
Professeur à l'université Paris 13

# Contents

<b>I</b>	<b>Milieux Magnétiques</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Historique rapide . . . . .	5
1.2	Le plan . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Moment Magnétique</b>	<b>9</b>
2.1	Modèle de la spire . . . . .	9
2.2	Electron sur son orbite (magnétisme orbital) . . . . .	10
2.3	Magnétisme de spin . . . . .	11
2.4	Vecteur excitation du champ magnétique $H$ . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Magnétostatique</b>	<b>15</b>
3.1	Equations de Maxwell: . . . . .	15
3.2	Electrostatique . . . . .	15
3.3	Magnétostatique: approche coulombienne . . . . .	16
3.3.1	Equations locales et aux limites . . . . .	16
3.4	Magnétostatique (approche ampérienne) . . . . .	20
3.4.1	Courants fictifs . . . . .	20
3.4.2	potentiel vecteur . . . . .	21
3.5	Champ magnétique créé par un corps aimanté: exemples . . . . .	21
3.5.1	Cylindre aimanté uniformément selon son axe . . . . .	21
3.5.2	Cas d'une sphère uniformément aimantée (approche coulombienne) . . . . .	25
3.5.3	Le potentiel: . . . . .	26
3.5.4	Le champ magnétique (excitation) . . . . .	28
3.5.5	Discontinuité du champ: . . . . .	29
3.6	Réponse de la matière à un champ magnétique appliqué . . . . .	29
3.6.1	Excitation du champ $H$ comme variable indépendante . . . . .	29
3.6.2	Différents types de comportements magnétiques . . . . .	30
3.6.3	Boule magnétique LHI plongée dans un champ uniforme . . . . .	31
3.6.4	Approximation des circuits magnétiques . . . . .	34
3.6.5	Exercice: Ventouse Magnétique . . . . .	37

<b>4</b>	<b>Moment dans un champ</b>	<b>41</b>
4.1	Précession de Larmor . . . . .	41
4.1.1	Conservation de la norme de $\mathfrak{M}$ . . . . .	42
4.1.2	Conservation angulaire . . . . .	42
4.1.3	Nature du mouvement . . . . .	43
4.2	Effet de l'amortissement . . . . .	44
4.2.1	Equation de Landau-Lifschitz-Gilbert . . . . .	44
4.2.2	Conservation de la norme de $M$ . . . . .	45
4.2.3	Dissipation d'énergie . . . . .	45
4.2.4	Résolution de l'équation de L.L.G. . . . .	45
4.3	Annexe . . . . .	47
<b>5</b>	<b>résonance magnétique</b>	<b>49</b>
5.1	Introduction: . . . . .	49
5.2	Rappels sur la précession libre . . . . .	49
5.3	Régime forcé sans amortissement . . . . .	50
5.4	Effet de l'amortissement . . . . .	51
5.4.1	Landau-Lifschitz-Gilbert, Equations de Bloch . . . . .	51
5.4.2	Aspect expérimental . . . . .	55
5.5	Résonance ferromagnétique . . . . .	56
5.5.1	Champ démagnétisant . . . . .	56
5.6	Résonance magnétique nucléaire (RMN , NMR) . . . . .	58
5.6.1	Les bases de la résonance (une touche quantique ! ) . . . . .	59
5.6.2	Assemblée de noyaux dans un champ magnétique . . . . .	59
5.6.3	La technique RMN . . . . .	61

# Part I

## Milieux Magnétiques



# Chapter 1

## INTRODUCTION

*Le magnétisme, un beau sujet de conversation.*

*(Voltaire)\**

### 1.1 Historique rapide

Le magnétisme regroupe l'analyse des propriétés magnétiques des corps et l'étude des champs magnétiques. Il s'agit d'une science très ancienne, certains phénomènes magnétiques liés à la matière sont connus depuis plusieurs millénaires. C'est le cas des effets d'attraction de la pierre d'aimant ou magnétite ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) sur le fer, décrits par Thalès de Milet ( $\approx 650$  av. J.C.). Aristote ( $\approx 384 - 322$  av. J.C.) signale déjà que certaines propriétés magnétiques peuvent être acquises par du fer doux après contact avec un aimant. On dit que le fer est aimanté. Ces propriétés remarquables ont longtemps fasciné l'esprit humain; on comprend d'autant mieux les autres sens du mot magnétisme: l'influence qu'une personne peut exercer sur une autre. On parle parfois de "fluide magnétique". Enfin, ce mot s'attache aussi à diverses pratiques parapsychologiques non soumises à l'expérimentation scientifique (magnétiseur..) dont nous ne parlerons pas.

La toute première application du magnétisme fut dédiée à la navigation sous forme de boussoles et de compas. Elle date du XI siècle. La compréhension quantitative débute avec les travaux de Charles Augustin Coulomb (1736-1840) qui établit les lois d'actions des charges magnétiques avec la distance talonné par les travaux théoriques de Denis Poisson (1781-1840). Puis les connaissances s'accélérent en cette fin de XVIII<sup>e</sup> siècle et début du XIX siècle, citons Ampère - Oersted - Faraday pour leur travaux sur courant et champ et leur influence sur un milieu aimanté. Nommons aussi l'incontournable James Clark Maxwell (1831-1879) mais aussi le puissant travail expérimental de Pierre Curie qui vers 1895 distingue clairement paramagnétisme et diamagnétisme avant de s'intéresser à la transition de certains composés du ferromagnétisme vers le paramagnétisme en fonction de la température. Le début du XX siècle est lui aussi particulièrement fécond avec les contributions de Paul Langevin (1905) portant sur la description atomique du diamagnétisme et du paramagnétisme

---

\* Cette citation figure en exergue du livre ( une "somme" remarquable ! ) de Herpin: "Théorie du Magnétisme" P.U.F 1968.

ainsi que les travaux de Pierre Weiss (1906) qui élabore une première théorie du ferromagnétisme. C'est ensuite la grande machinerie quantique qui entre en scène avec Werner Heisenberg (1928) et son interprétation de l'échange ferromagnétique, puis John Hasbrouck Van Vleck (1932) établit la théorie (la bonne) quantique du dia et paramagnétisme et enfin Paul Adrien Maurice Dirac, la même année, qui introduit la notion de spin de l'électron.....

De nos jours, le magnétisme demeure une discipline particulièrement active et florissante. La recherche développe à la fois l'aspect fondamental et théorique ( limite des connaissances ) et l'aspect technologique. Possédant des propriétés particulièrement contrastées allant des aimants permanents présentant une forte induction rémanente aux matériaux extrêmement doux comme le "supermalloy", les matériaux magnétiques sont omniprésents dans notre environnement journalier: en électrotechnique (aimants, acier doux), électronique (ferrites, permalloy) en mécanique ainsi qu'en informatique et bureautique ( têtes de lecture inductive ou non inductive, disques durs magnétiques et magnétooptiques, MRAM...). Il en ressort que le développement et la compréhension du comportement de nouveaux composés magnétiques tant par leurs compositions que leur formes (massif cristallisé, amorphe, couche mince, élément nanostructuré en plots et fils, agrégats, grains fins) occupent actuellement une place de choix dans le monde de la recherche industrielle comme universitaire.

## 1.2 Le plan

Les milieux magnétiques ou aimantés seront traités en deux fascicules. Le premier introduira la notion d'aimantation au niveau macroscopique, c'est à dire comme une grandeur nivelée à l'aide d'une moyenne spatiale. Partant de l'analogie entre une spire circulaire et un moment dipolaire magnétique, le calcul de l'aimantation montrera - à l'aide du mouvement orbital des électrons uniquement - que cette description est équivalente à celle que l'on peut faire en termes de courants électriques volumiques et surfaciques. Après avoir établi les équations de Maxwell macroscopiques en présence de milieux magnétiques nous effectuerons le calcul des champs  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  dus à la présence de corps magnétiques dont l'aimantation (constante dans le temps) est réputée connue. Ce calcul magnétostatique sera introduit soit sous la forme ampèrienne, le milieu magnétique étant remplacé par une distribution de courants en volume comme en surface soit en empruntant la voie coulombienne à l'aide d'une répartition de charges magnétiques. La dernière partie de ce fascicule sera dévolue au mouvement d'un dipôle magnétique en présence d'un champ appliqué (précession de Larmor) . L'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert régissant le mouvement d'un moment magnétique isolé en présence d'un terme dissipatif sera entièrement résolue dans l'approximation du micromagnétisme.

La deuxième partie s'articulera essentiellement autour de la description microscopique du magnétisme. Ainsi seront passés en revue les différents états de la matière: diamagnétisme, paramagnétisme et milieux magnétiquement ordonnés

(ferromagnétisme, antiferro., ferri., etc .....), le traitement étant uniquement (semi) classique.





## Chapter 2

### MOMENT MAGNÉTIQUE

#### 2.1 Modèle de la spire

On se propose de rappeler les résultats déjà connus des étudiants concernant le champ magnétique créé par une spire circulaire parcourue par un courant constant  $I$ . A grande distance de la spire (distance  $\gg$  diamètre de la spire) l'induction du champ magnétique  $\vec{B}$  peut s'écrire sous la forme du gradient d'un potentiel scalaire  $\Phi$ . En effet, en dehors de toute source de courant,  $\text{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$ . On peut donc (toujours avec beaucoup de précautions) écrire "  $\vec{B} = -\text{grad} \Phi$ " avec

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega \quad \text{où} \quad \Omega = \frac{S \cos \theta}{r^2}$$

la valeur de  $\Omega$ , l'angle solide sous lequel on voit la spire depuis le point de calcul du champ, est ici exprimée dans l'approximation où  $r$  est grand devant le diamètre de la spire.

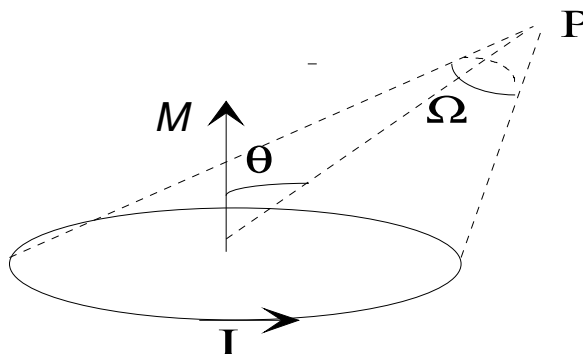


Figure 1 Moment magnétique équivalent à une spire de courant

le potentiel magnétostatique  $\Phi$  peut donc se mettre formellement sous une forme équivalente à celle déjà obtenue pour le potentiel électrostatique créé par un dipôle électrique:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{S \cos \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \quad (2.1)$$

Le moment (dipolaire) magnétique étant égal à :

$$\vec{\mathfrak{M}} = IS \vec{n}$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal au plan de la spire et orienté selon la convention d'Ampère (sort par la face Nord).

## 2.2 Electron sur son orbite (magnétisme orbital)

L'électron de charge  $(-e)$  décrivant à la vitesse  $v$  une orbite de longueur  $\ell$  autour du noyau s'apparente à une spire parcourue par un courant  $I$ . L'équivalence du flux de charge dans ces deux situations donne:

$$\frac{dQ}{dt} = I = \frac{-ev}{\ell}$$

Le moment magnétique associé s'écrit:

$$\vec{\mathfrak{M}} = \int_{\Gamma} d\vec{\mathfrak{M}} = \int_{\Gamma} I d\vec{S} = \frac{I}{2} \int_{\Gamma} \vec{r} \wedge d\vec{l} = \frac{-ev}{2\ell} \int_{\Gamma} \vec{r} \wedge d\vec{l}$$

Par ailleurs, le déplacement élémentaire  $d\vec{l}$  de l'électron sur son orbite  $\Gamma$  est localement colinéaire à la vitesse  $\vec{v}$  donc:

$$\vec{\mathfrak{M}} = \frac{-e}{2\ell} \int_{\Gamma} ( \vec{r} \wedge \vec{v} ) dl$$

On peut faire intervenir le moment cinétique de l'électron :  $\vec{L}$  réputé être invariant dans le temps

$$\vec{\mathfrak{M}} = \frac{-e}{2m\ell} \int_{\Gamma} ( \vec{r} \wedge m\vec{v} ) dl = \frac{-e}{2m} \vec{L} \frac{1}{\ell} \int_{\Gamma} dl$$

soit:

$$\vec{\mathfrak{M}} = \frac{-e}{2m} \vec{L} \tag{2.2}$$

Cette relation extrêmement importante nous indique qu'à toute charge en mouvement possédant un moment cinétique lui est associé un moment magnétique. Le rapport: moment magnétique sur moment cinétique est appelé rapport gyromagnétique, nous le noterons  $\gamma$ , dans le cas du mouvement orbital de l'électron il vaut:

$$\gamma = \frac{\vec{\mathfrak{M}}}{\vec{L}} = \frac{-e}{2m}$$

soulignons qu'il est négatif, les deux moments sont de sens opposé.

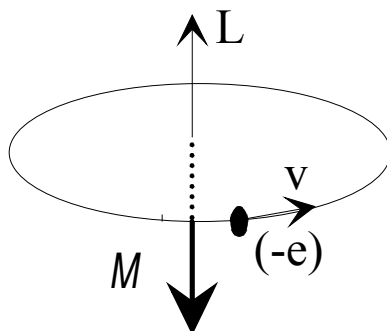


Figure 2 Moments cinétique  $L$  et magnétique  $M$  associés à l'électron sur son orbite

### 2.3 Magnétisme de spin

Lorsqu'un électron effectue un mouvement lié autour du noyau, nous avons vu qu'il correspond à ce mouvement un moment magnétique "orbital". En plus de ce moment, l'électron possède un moment magnétique propre lié au moment cinétique propre  $\vec{S}$  (spin)

$$\vec{\mathfrak{M}}_S = \frac{-e}{m} \vec{S}$$

ref. calcul de mécanique quantique relativiste de P.A.M. Dirac (1928); voir aussi l'expérience de Einstein- de Haas (1915) ainsi que la célèbre expérience de Stern et Gerlach (1921).

### 2.4 Vecteur excitation du champ magnétique $\mathbf{H}$

Nous avons déjà introduit le vecteur induction du champ magnétique  $\vec{B}$  (unité Tesla) dont on a vu que son rotationnel était donné par

$$\overrightarrow{rot} (\vec{B}) = \mu_o \left[ \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right]$$

Il convient maintenant de rajouter un terme qui tienne compte de l'apport de la matière aimantée. Pour ce faire nous suivons l'approche élémentaire développée par Feynman (course of physics tome II) en introduisant un vecteur densité de courant magnétique  $\vec{j}^*$  dont nous allons préciser la forme. L'équation précédente s'écrit alors:

$$\overrightarrow{rot} (\vec{B}) = \mu_o \left[ \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}^* \right] \quad (2.3)$$

Le milieu magnétique, dans notre approche classique, peut se représenter comme un ensemble de dipôles magnétiques élémentaires auxquels peuvent-être associés un ensemble de "petites spires élémentaires de courant comme indiqué sur la figure 3.

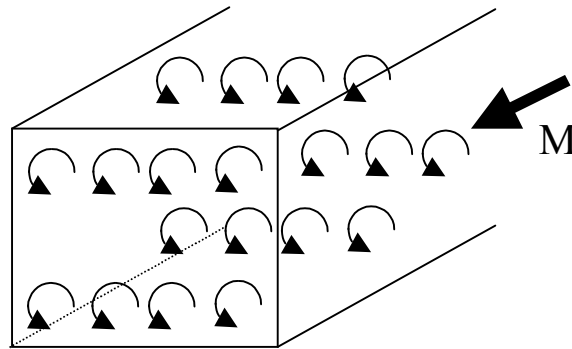


Figure 3 Représentation d'un milieu magnétique d'aimantation  $M$  par un ensemble de spires élémentaires.

Plaçons nous maintenant à l'échelle atomique et considérons deux parallélépipèdes élémentaires dont les côtés sont respectivement notés  $dx, dy$  et  $dz$  (il s'agit de quantités infinitésimales). La cellule (1) de la fig.4 est parcouru sur son pourtour par le courant  $I_1$  qui circule parallèlement au plan  $XOY$ . Ce courant induit un moment dipolaire magnétique élémentaire  $\vec{m}$  dans la direction  $z$  nous le noterons  $m_z = I_1 S = I_1 dx \cdot dy$ .

On peut définir le vecteur aimantation  $\vec{M}$  localement comme une densité de moment dipolaire magnétique (voir l'analogie avec la définition du vecteur polarisation  $\vec{P}$  pour les milieux diélectriques).

Ramené au volume  $dx \cdot dy \cdot dz$  de la cellule on obtient ainsi:  $M_z = m_z / (dx \cdot dy \cdot dz) = I_1 / dz$ . Ce même raisonnement peut être tenu pour la cellule voisine dont le centre est déplacé de  $dx$ . On a alors:  $M_z + dM_z = I_2 / dz$

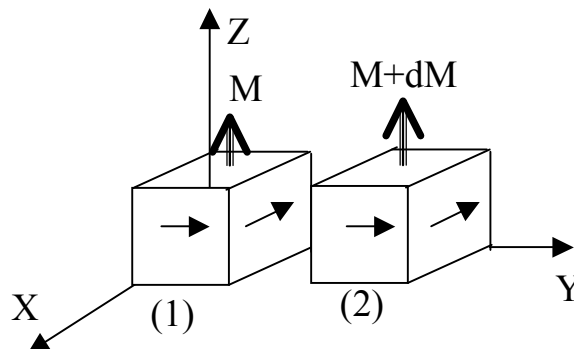


Figure 4 Cellules élémentaires voisines

On note que les cellules (1) et (2) ont une face commune (les deux cellules 1 et 2 sont accolées même si le dessin de la fig.4 peut laisser croire le contraire) parallèle au plan  $XOZ$ . Le courant résultant dans la direction  $OX$  pour ces deux cellules s'écrit

simplement:  $I_{résult} = I_2 - I_1 = dM_z.dz$ . Ce courant résultant est algébriquement dirigé vers x croissants. Ce courant s'étale sur une surface moyenne dont la normale est OX c'est à dire  $S=dy.dz$ . On peut donc lui faire correspondre une densité de courant "volumique"  $j_x = I_{résult}/S$  où encore  $j_x = \frac{I_{résult}}{dy.dz}$ . Par ailleurs,  $dM_z = M_z(y_2) - M_z(y_1)$ , où  $y_2$  et  $y_1$  sont les ordonnées des centres respectifs des cellules (1) et (2) distants de  $dy$ ; donc  $dM_z = \frac{\partial M_z}{\partial y} dy$ , d'où  $I_{résult} = I_2 - I_1 = \frac{\partial M_z}{\partial y} dy.dz$ . En regroupant l'ensemble de ces résultats on obtient:

$$j_x^* = \frac{\partial M_z}{\partial y}$$

Le lecteur se convaincra qu'il existe une seconde contribution pour  $j_x$  que l'on obtient en associant cette fois les cellules voisines (1) et (3).

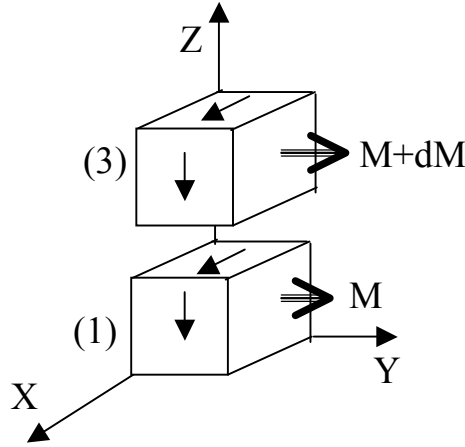


Figure 5 Schéma des cellules (1) et (3).

En effectuant une démarche similaire, il convient de rajouter le terme:  $-\frac{\partial M_y}{\partial z}$ . L'ensemble donne naissance à la relation

$$j_x^* = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

dont on remarque qu'elle n'est autre que la composante x de  $\vec{rot}(\vec{M})$ . De façon similaire, les deux autres composantes de ce courant peuvent se calculer. Le résultat final s'écrit:

$$\vec{j}^* = \vec{rot}(\vec{M})$$

De même peut-on faire apparaître une contribution surfacique

$$\vec{j}_S^* = \vec{j}_S^* = \vec{M} \wedge \vec{N}_{ext}$$

Dans le cas plus général le rotationnel du vecteur  $\vec{B}$  (éq.2.3), tenant compte des courants libres (milieu conducteur), du courant de déplacement (et donc de la nature diélectrique du milieu) ainsi que du courant ("approche ampérienne") dû au milieu magnétique, s'écrit:

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{B}) = \mu_o [\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{M})] \quad (2.4)$$

On construit un champ  $\vec{H}$ : excitation du champ magnétique (unité Ampère/mètre) tel que son rotationnel soit égal à la densité volumique de courant "vrai". Courant attaché aux charges libres de se mouvoir sur de grandes distances sans rapport avec la taille atomique. C'est le cas du courant de conduction traditionnel dans un conducteur dû aux électrons libres. Dans le cas statique on écrit:

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{H}) = \vec{j}$$

dans le cas dynamique on rajoute le courant dit de déplacement comme nous l'avons vu précédemment:

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

La comparaison de cette dernière équation avec l'éq.2.4 permet d'écrire une relation très importante reliant  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  et  $\vec{M}$ :

$$\vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M}) \quad (2.5)$$

où  $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$  (Henry/mètre) est la perméabilité magnétique du vide

## Chapter 3

# MAGNÉTOSTATIQUE

### 3.1 Equations de Maxwell:

On se propose de regarder à nouveau la forme que prennent les équations de Maxwell en spécifiant le cas des milieux magnétiques. Nous regarderons tout à la fois les relations locales ainsi que la forme qu'elles prennent aux limites. Enfin, nous développerons dans le corps de ce chapitre l'analogie entre l'électrostatique et la magnétostatique.

les quatre équations locales s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{H}) &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_o} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

rappelons que la divergence du vecteur champ électrique fait intervenir l'ensemble des charges (réelles et de polarisation) électriques.

### 3.2 Electrostatique

Le problème est indépendant du temps, soit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_o} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Cette dernière relation indique que le champ électrostatique dérive d'un potentiel scalaire.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}V$$

Le potentiel électrostatique obéit à l'équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_o} = 0$$



De plus, le potentiel est une fonction continue, s'il n'en était pas ainsi, localement le champ serait infini.

Il reste à écrire les conditions aux limites pour le champ électrostatique:

$$\begin{aligned}\vec{N}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= \frac{\sigma_{tot}}{\epsilon_o} \\ \vec{N}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= \vec{0}\end{aligned}$$

→ continuité de la composante tangentielle de E d'une part,

→ discontinuité de la composante normale d'autre part, à la traversée d'une surface chargée.  $\vec{N}_{12}$  vecteur unitaire normal à l'interface séparant deux milieux et allant du milieu 1 au milieu 2.

Enfin, pour l'énergie électrostatique; dans le cas d'une distribution de charge:

$$U = \frac{\mu_o}{2} \int \int_S \sigma(r) V(r) d^2S + \frac{\mu_o}{2} \int \int \int_V \rho(r) V(r) d^3v$$

### 3.3 Magnétostatique: approche coulombienne

#### 3.3.1 Equations locales et aux limites

#### Les Champs

On calque notre approche sur celle du paragraphe précédent. Les équations de maxwell se réduisent à

$$\begin{aligned}div \vec{B} &= 0 \\ \text{rot}(\vec{H}) &= \vec{0}\end{aligned}$$

On impose l'absence de courant et le régime stationnaire, alors les champs E et H sont découplés.

La dernière relation impose que H dérive d'un potentiel scalaire:

$$\vec{H} = -\overrightarrow{grad}V$$

Il n'est pas sans intérêt de se rappeler la relation liant B, H et M pour un milieu magnétique ( dans la limite de l'approximation dipolaire)

$$\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$$

La première équation traduisant la conservation du flux de B donne

$$div \vec{H} = -div \vec{M}$$

Par analogie, le terme  $div \vec{M}$  peut-être interprété comme source de H. On fait donc intervenir une densité volumique de (quasi) charges magnétiques,  $\rho^*$ , telle que:

$$div \vec{H} = \rho^*$$

A l'interface entre deux milieux (1,2) les conditions aux limites sur H s'écrivent:  
-> continuité de la composante tangentielle (toujours en l'absence de courant "vrai")

$$\vec{N}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{0}$$

soit:

$$\vec{H}_{//2} - \vec{H}_{//1} = \vec{0}$$

en présence d'une densité superficielle de courant  $\vec{j}_S$  de conduction:

$$\vec{H}_{//2} - \vec{H}_{//1} = \vec{j}_S \wedge \vec{N}_{12}$$

-> discontinuité de la composante normale à l'interface

$$\vec{N}_{12} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \sigma^*$$

la densité superficielle de (quasi) charge magnétique,  $\sigma^*$ , entraînant la discontinuité de la composante normale de H s'écrit:

$$\sigma^* = -\vec{N}_{12} \cdot (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

Il est important de souligner que ces (quasi) charges magnétiques ne sont les sources que de  $\vec{H}$  et ABSOLUMENT PAS de  $\vec{B}$  dont la divergence reste toujours nulle.

**En résumé** Pour un milieu magnétique isolé, il peut-être représenté, pour le calcul de H, par une distribution en volume de (quasi) charges magnétiques

$$\rho^* = -div \vec{M}$$

et par une distribution de (quasi) charges surfaciques

$$\sigma^* = \vec{N}_{ext} \cdot \vec{M}$$

ou  $\vec{N}_{ext}$  est un vecteur unitaire normale à la surface du milieu magnétique et dirigé vers l'extérieur de celui ci.

Le champ magnétique, à partir de ces charges, peut donc s'écrire sous la forme:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[ \int \int \int_{\tau} \frac{\rho^*(r') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' + \int \int_S \frac{\sigma^*(r') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^2r' \right]$$

Ce champ, qui dépend notablement de la géométrie du matériau, est très souvent appelé champ démagnétisant, nous le noterons fréquemment  $\vec{H}_d$  par la suite.

## Le potentiel

Son rotationnel étant nul (absence de courant de conduction) le champ (excitation) magnétique  $\vec{H}$  dérive d'un potentiel scalaire magnétique  $V$ .

Par ailleurs,  $V$  doit vérifier

$$\Delta V + \rho_{qm} = 0$$

Comme en électrostatique, le potentiel doit-être une fonction continue.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[ \int \int \int_{\tau} \frac{\rho^*(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \int \int_S \frac{\sigma^*(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^2r' \right]$$

## L'énergie magnétostatique

Elle se met sous la forme:

$$U = \frac{\mu_o}{2} \left[ \int \int_s \sigma^* V d^2S + \int \int \int_{vol.} \rho^*(r) V(r) d^3r \right]$$

Enfin citons deux autres formes utilisables: la première utilise une intégrale triple étendue sur tout l'espace

$$U = \frac{\mu_o}{2} \int \int \int_{R^3} H_d^2 d^3r$$

la seconde se limite à l'étendue du matériau magnétique

$$U = -\frac{\mu_o}{2} \int \int \int_{\tau} \vec{H}_d \cdot \vec{M} d^3r$$

## Distribution de charges équivalentes et potentiel $V$

*Ce calcul est strictement correct en tout point pris hors de la matière. Toutefois les résultats restent aussi exacts dans le milieu sous réserve de comprendre le champ et la polarisation comme des grandeurs moyennées comme ceci a été évoqué plus haut.*

Nous allons retrouver les résultats précédents en nous intéressant à un matériau dont la valeur de l'aimantation est supposée connue en tout point et fixe. Soit un volume  $\tau$  de ce matériau d'aimantation  $\vec{M}(r)$ , au point P, le potentiel créé par l'élément  $d\tau$  pris au voisinage du point A, sera équivalent à celui produit par un dipôle élémentaire  $d\vec{\mathfrak{M}} = \vec{M} d\tau$  (fig.1).

on peut donc écrire: (attention  $\vec{r} = \vec{PA}$ ; ici origine prise au point de calcul du champ))

$$dV = - \frac{(\vec{M} d\tau) \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

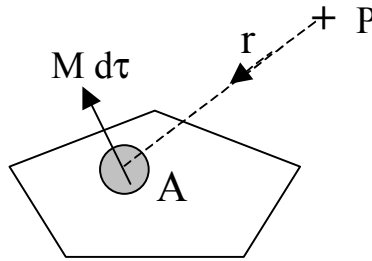


Figure 1 géométrie utilisée pour le calcul de V

Le potentiel obtenu pour le volume  $\tau$  est alors égal à:

$$V = - \int \int \int \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} d\tau$$

Le lecteur s'assurera de la validité des formules suivantes, d'une part:

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right)$$

où la dérivation se fait en maintenant le point P fixe et le point A variable, et d'autre part:

$$\text{div}(\lambda \vec{a}) = \lambda \text{div}(\vec{a}) + \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \lambda$$

Ceci permet d'écrire

$$-\frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} = \vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) = \text{div} \left( \frac{\vec{M}}{r} \right) - \frac{1}{r} \text{div}(\vec{M})$$

On se rappelle enfin du théorème flux-divergence:

$$\int \int \int_{\tau} \text{div} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) d\tau = \int \int_{\Sigma} \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}_{\text{ext}}}{r} dS$$

Ceci nous permet d'écrire le potentiel sous la forme finale:

$$V(P) = \int \int \int_{\tau} \frac{-\text{div} \vec{M}}{4\pi r} d^3r + \int \int_{S} \frac{\vec{M} \cdot \vec{n}_{\text{ext}}}{4\pi r} dS$$

(Par analogie avec l'électrostatique), ce potentiel est équivalent à celui qui serait créé par une distribution de charge volumique - égale à  $-\text{div} \vec{M}$  et une distribution de charge surfacique  $\vec{M} \cdot \vec{n}_{\text{ext}}$ .

### 3.4 Magnétostatique (approche ampérienne)

Les formes précédentes peuvent être reprises en s'intéressant maintenant au champ de vecteurs induction magnétique  $\vec{B}$ . On se base alors sur le couple d'équation:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

et

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_o \operatorname{rot}(\vec{M})$$

#### 3.4.1 Courants fictifs

on introduit la densité volumique de courant fictif:  $\vec{j}^*$

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_o \operatorname{rot}(\vec{M}) = \mu_o \vec{j}^*$$

de façon similaire, on fait apparaître la densité de courant surfacique:  $\vec{j}_S^*$

$$\vec{j}_S^* = \vec{N}_{12} \wedge (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

Les conditions aux limites pour l'induction s'écrivent:  
continuité de la composante normale:

$$\vec{N}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

discontinuité de la composante tangentielle qui, en l'absence de courant (vrai) de conduction, s'écrit:

$$\vec{N}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_o [ \vec{N}_{12} \wedge (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) ]$$

où encore, pour la partie tangentielle (parallèle à l'interface //)

$$\vec{B}_{//2} - \vec{B}_{//1} = \mu_o ( \vec{j}_S^* \wedge \vec{N}_{12} )$$

avec la présence supplémentaire d'une densité superficielle de courant  $\vec{j}_S$  de conduction, la relation précédente devient:

$$\vec{B}_{//2} - \vec{B}_{//1} = \mu_o [ (\vec{j}_S + \vec{j}_S^*) \wedge \vec{N}_{12} ]$$

**En résumé** Pour un milieu magnétique ( $\vec{M}$ ) isolé, il peut-être représenté, pour le calcul de B, par une distribution en volume de courant

$$\vec{j}^* = \operatorname{rot}(\vec{M})$$

et par une distribution surfaciques de courant

$$\vec{j}_S^* = \vec{M} \wedge \vec{N}_{12}$$

3.4.2 potentiel vecteur

La divergence de l'induction magnétique étant nulle, ce champ de vecteurs dérive d'un potentiel vecteur noté  $\vec{A}$  donné par:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[ \int \int \int_{\tau} \frac{\vec{j}^*(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \int \int_S \frac{\vec{j}_S^*(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^2S \right] \quad (3.1)$$

Le potentiel vecteur est une fonction continue, même en présence d'une discontinuité de l'aimantation. L'induction du champ magnétique s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) = & \frac{\mu_o}{4\pi} \left[ \int \int \int_{\tau} \frac{\vec{j}^*(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \right. \\ & \left. + \int \int_S \frac{\vec{j}_S^*(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^2S \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

expression que l'on peut directement obtenir à partir de la formule Biot et Savart.

3.5 Champ magnétique créé par un corps aimanté: exemples

On se propose de calculer les champs  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$  créés par des corps uniformément aimantés ( donc  $\vec{M}$  donné) et ce pour des géométries simples. Nous verrons dans la partie (V) suivante le calcul complet en incluant l'effet en retour du champ démagnétisant sur la distribution de M.

3.5.1 Cylindre aimanté uniformément selon son axe

On considère un aimant permanent de forme cylindrique de rayon R et de hauteur e. Ce milieu ferromagnétique possède une aimantation uniforme et constante:

$$\vec{M} = M \vec{u}_z$$

Le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  étant parallèle à l'axe du cylindre (Z'Z). Par ailleurs, le milieu est réputé être isolant et sa permittivité diélectrique sera prise égale à celle du vide.

On se propose d'évaluer en tout point de l'espace ces trois champs de vecteurs. Deux voies - au choix - sont offertes aux étudiants. La première s'appuie sur les courants ampériens. La seconde voie proposée s'articule autour des (quasi) charges magnétiques ou méthode coulombienne. Dans les deux cas on exprimera les champs calculés en fonction des angles orientés  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  comme indiqué sur la figure ou en fonction des angles solides sous lesquels sont vues les surfaces externes du barreau.

-----

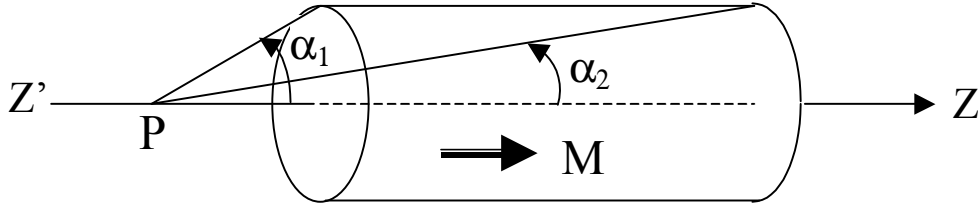


Figure 2 Géométrie

→ VOIE A: Courants ampériens: Calcul de  $\vec{B}$  connaissant  $\vec{M}$

On se place en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$

Calcul des courants équivalents: (milieu: indice 1 ; extérieur (vide): indice 2 )

-> en volume

$$\vec{j}^* = \text{rot}(\vec{M}) = \vec{0}$$

-> en surface : sur la surface latérale uniquement

$$\vec{j}_S^* = \vec{N}_{12} \wedge (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) = \vec{M} \wedge \vec{N}_{12} = M \vec{e}_\theta$$

Expression du champ d'induction magnétique en un point P sur l'axe. On applique l'équation 3.2

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \int_{\text{surface latérale}} \frac{M \vec{e}_\theta \wedge [z \vec{e}_z - (z' \vec{e}_z + R \vec{e}_r)]}{|z \vec{e}_z - (z' \vec{e}_z + R \vec{e}_r)|^3} d^2 S'$$

Tout plan contenant l'axe Z'Z est plan d'antisymétrie pour la distribution de courant. Le champ d'induction magnétique en un point de ce plan doit donc être parallèle à celui-ci. Si l'on calcule le champ en un point de l'axe Z'Z, ce point appartient à une infinité de plans contenant Z'Z (plans de zone Z'Z). Le champ devant appartenir à chacun de ces plans ne pourra donc qu'être parallèle à Z'Z.

$$B_z(P) = -\frac{\mu_o M R}{4\pi} \int \int_{\text{surface latérale}} \frac{d^2 S'}{|z \vec{e}_z - (z' \vec{e}_z + R \vec{e}_r)|^3}$$

La surface élémentaire que nous choisissons, comme indiqué sur la figure 3 est égale à

$$dS' = 2\pi R dz'$$

ceci donne:

$$B_z(P) = -\frac{\mu_o M}{2R} \int \frac{R^3}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz'$$

L'intégration donne:

$$B_z(P) = \frac{\mu_o M}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

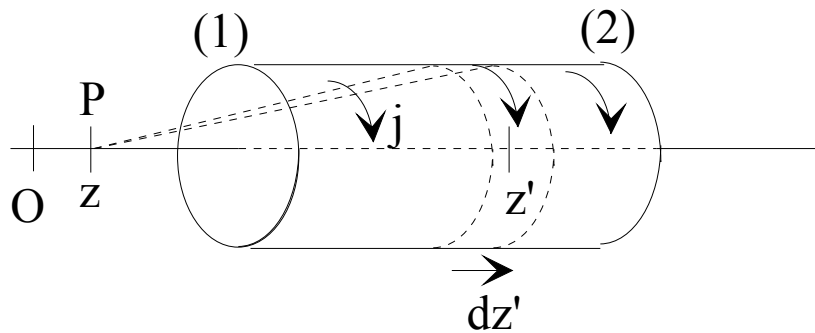


Figure 3 Courants superficiels équivalents

Cette expression est valable pour tout point (intérieur et extérieur) appartenant à l'axe Z'Z. On peut faire intervenir l'angle solide sous lequel, depuis le point P chaque face extrême du cylindre est vue :

$$\Omega_i = 2\pi(1 - \cos \alpha_i)$$

ceci donne:

$$B_z(P) = \frac{\mu_o M}{4\pi} (\Omega_1 - \Omega_2)$$

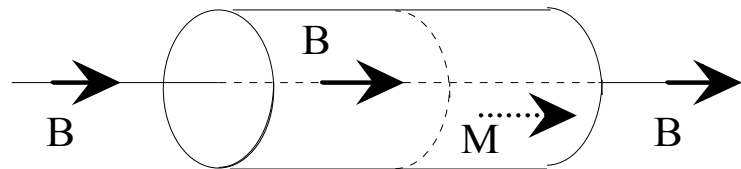


Figure 4 Esquisse des lignes de champ pour le vecteur B

Le long de l'axe du cylindre nous connaissons  $\vec{B}$ , l'aimantation étant une donnée du problème, le champ (excitation) magnétique s'en déduit à partir de l'équation constitutive du milieu.

-----



→ Voie (B): charges coulombiennes : Calcul de  $\vec{H}$  connaissant  $\vec{M}$ .

Calcul des (quasi) charges magnétiques: ( milieu  $\rightarrow 1$  ; extérieur (vide)  $\rightarrow 2$  )

$\rightarrow$  en volume:

$$\rho^* = -\text{div} \vec{M} = 0$$

$\rightarrow$  en surface, sur les deux surfaces droites (normales à Z'Z)

$$\sigma^* = -\vec{N}_{12} \cdot (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) = \vec{N}_{12} \cdot \vec{M}_1$$

voir la figure 5: la surface de droite porte la charge  $\sigma^* = +M$  et celle de gauche la charge opposée  $\sigma^* = -M$

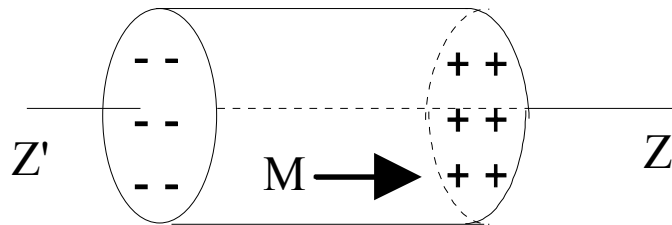


Figure 5 Distribution de charges magnétiques équivalentes

Il faut donc calculer le champ dû à deux disques uniformément chargés. On effectue le calcul uniquement en tout point le long de l'axe Z'Z du cylindre (voir cours d'électrostatique DEUG1 ). On obtient:

à l'intérieur du cylindre :

$$\vec{H}_{int} = -\frac{M}{2} [ 2 - (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) ] \vec{e}_z$$

on remarquera que le champ est, en sens, opposé à l'aimantation, ceci explique l'appellation de champ "démagnétisant". En effet ce champ a tendance à renverser le sens de l'aimantation.

à l'extérieur du cylindre :

$$\vec{H}_{ext} = \frac{M}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{e}_z$$

A l'intérieur du matériau aimanté la valeur de l'induction magnétique s'obtient à l'aide de l'équation constitutive tandis qu'à l'extérieur (vide) B et H sont colinéaires

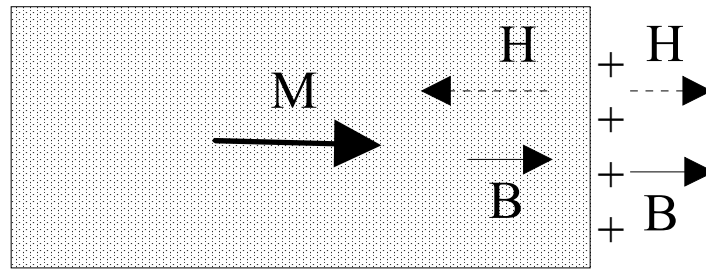


Figure 6 Illustration des conditions aux limites pour les champs sur une surface du matériau

”l’équation constitutive” se réduisant à  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ . L’étudiant pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus à l’aide des deux méthodes. Enfin, il s’attardera avec profit sur l’analyse des conditions aux limites sur les sections droites extrêmes ( voir figure 6 ) ainsi que sur la surface latérale.

-----

Le dernier point que nous souhaiterions mentionner sur ce problème concerne l’étude du comportement des champs dans les deux cas limites suivants:  $e \gg R$  et  $e \ll R$ .

->> cylindre ”étiré” :  $e \gg R$

En se plaçant sur l’axe  $Z'Z$  et dans le coeur du matériau, on obtient:

$$\vec{H} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{M}$$

->> lame infinie :  $e \ll R$ , fig.7

sur l’axe et à l’intérieur du matériau

$$\vec{H}_{int} = -\vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{int} = \vec{0}$$

tandis qu’à l’extérieur on tend vers:

$$\vec{H}_{ext} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{ext} = \vec{0}$$

quelques illustrations de l’évolution du champ

### 3.5.2 Cas d’une sphère uniformément aimantée (approche coulombienne)

On se propose de calculer en tout point de l’espace (intérieur et extérieur à la sphère) le potentiel et le champ magnétique créés par une sphère uniformément aimantée placée dans le vide. On prend l’origine des coordonnées au point O centre de la sphère de rayon R, l’axe OZ est placé parallèlement au vecteur aimantation du milieu dont la norme constante est égale à M.

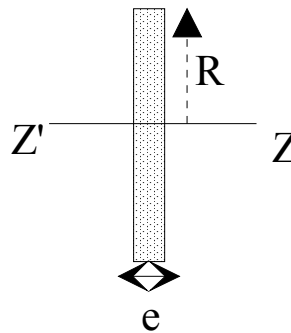


Figure 7 Cas  $R \gg e$  ; approche géométrique d'une lame plane.

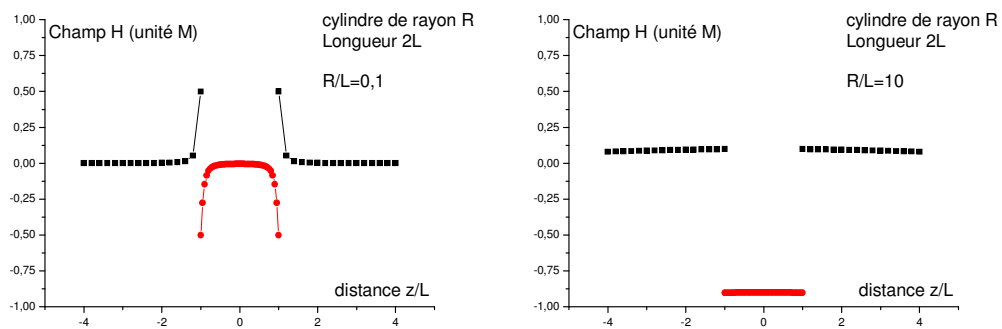


Figure 8 Variation de l'excitation du champ magnétique H dû à un barreau cylindrique uniformément aimanté le long de son axe.

### 3.5.3 Le potentiel:

i) *Les symétries*: Le potentiel, en coordonnées sphériques, sera de la forme  $V(r, \theta, \varphi)$ . Toute rotation autour de l'axe OZ laisse pour l'observateur le problème invariant et notamment la distribution de charges, le problème est donc indépendant de l'azimut  $\varphi$  :  $V(r, \theta)$ .

ii) *Distribution de charges équivalents*: Le vecteur aimantation étant constant, il n'y a pas de (quasi)-charges en volume. Par contre, en surface va apparaître une densité surfacique ( éq.??)

$$\sigma^*(R, \theta) = M \cdot \cos \theta$$

iii) *Résolution de l'équation de Laplace*: En tout point de l'espace, a priori surface exclue, le potentiel magnétique doit vérifier la loi de Laplace:

$$\Delta V = 0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

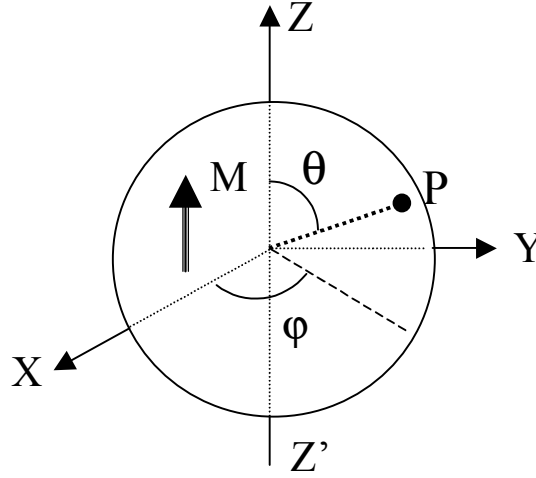


Figure 9 Sphère uniformément aimantée, rappel des coordonnées.

De plus, le potentiel étant une fonction continue, il ne subira pas de discontinuité lors du passage du milieu magnétique au vide.

iV) *Valeur limite*: Une première idée de la forme prise par le potentiel peut nous être donnée à grande distance de la sphère. Effectivement, pour  $r \gg R$ , le potentiel dû à cette sphère doit tendre vers celui que donnerait un moment dipolaire unique centré à l'origine et de valeur  $\vec{\mathfrak{M}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{M}$  soit en un point P repéré par  $\vec{r}$ :

$$V(r, \theta) = \frac{\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{MR^3 \cos \theta}{3 r^2} \quad (3.3)$$

On va donc, pour maintenir cette symétrie, chercher pour le potentiel une solution générale du type  $V=f(r)\cos\theta$ . En reportant ce type de solution dans l'équation de Laplace on obtient:

$$f'' + \frac{2}{r}f' - \frac{2}{r^2}f = 0$$

cherchons à exprimer la fonction  $f(r)$  sous une forme monomiale:  $f(r) \rightarrow r^\alpha$ , ceci entraîne pour  $\alpha$  deux valeurs possibles +1 et -2:

$$V(r, \theta) = \left(\frac{A}{r^2} + Br\right) \cos \theta$$

les coefficients A et B prenant des valeurs distinctes dans le vide et dans le milieu magnétique. Il convient maintenant de s'assurer de la continuité de V. A grande distance  $r \gg R$  l'éq. 3.3 impose  $B_{ext}=0$  et  $A_{ext}=\frac{MR^3}{3}$ . Au centre de la sphère le potentiel n'a aucune raison de devenir singulier, en conséquence la constante  $A_{int}$

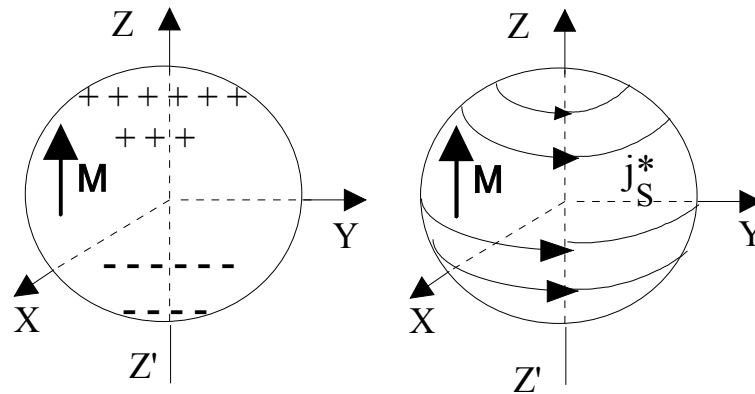


Figure 10 Quasi charges magnétiques ( à gauche) et Courants équivalents (fig. de droite).

sera prise nulle dans toute cette zone. Par ailleurs, le coefficient  $B_{int}$  s'obtient en écrivant la continuité du potentiel en  $r=R$ . On obtient de la sorte

$$\text{à l'extérieur } r \geq R : \quad V = \frac{MR^3 \cos \theta}{3 r^2} = \frac{\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{r}'}{4\pi r^3}$$

ce qui correspond strictement au potentiel dû à un moment dipolaire  $\vec{\mathfrak{M}}$  centré à l'origine et de module  $\|\vec{\mathfrak{M}}\| = M \frac{4}{3} \pi R^3$ .

$$\text{à l'intérieur } r \leq R : \quad V = \frac{M}{3} r \cos \theta$$

### 3.5.4 Le champ magnétique (excitation)

Il s'obtient à l'aide du potentiel: sachant que  $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{0}$  entraîne qu'il existe  $V$  tel que  $\vec{H} = -\text{grad}(V)$ .

Pour mémoire, en coordonnées sphérique

$$\text{grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

L'excitation du champ prend la forme:

$$\begin{aligned} \text{à l'extérieur } r > R : \\ \vec{H} &= \frac{MR^3}{3} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \end{aligned}$$

expression que l'on peut réécrire, à l'aide du moment dipolaire global de la sphère  $\vec{\mathfrak{M}}$ , sous la forme vectorielle:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{\mathfrak{M}}] \quad (3.4)$$

où  $\vec{\mathfrak{M}} = \vec{M} \frac{4}{3} \pi R^3$  et  $\vec{e}_r = \vec{r}/r$

à l'intérieur  $r < R$ , le champ est uniforme

$$\vec{H} = -\frac{\vec{M}}{3}$$

La figure suivante montre l'allure des lignes de champ (on parle souvent de champ démagnétisant pour la contribution interne: H et M opposés en sens).

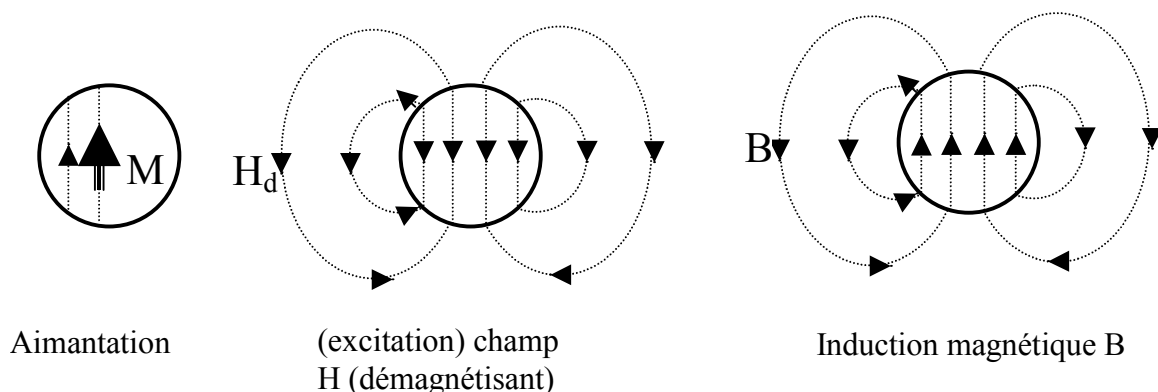


Figure 11 Boule uniformément aimantée, excitation du champ H et induction B créés.

### 3.5.5 Discontinuité du champ:

Le lecteur s'assurera que la composante normale à l'interface subit une discontinuité en  $r=R$  en vérifiant la relation :

$$(\vec{H}_{ext} - \vec{H}_{int}) \vec{e}_r = \sigma = M \cdot \cos \theta$$

tandis que la composante tangentielle se conserve (en  $r=R$ )

$$(\vec{H}_{ext} - \vec{H}_{int}) \vec{e}_\theta = 0$$

## 3.6 Réponse de la matière à un champ magnétique appliqué

Nous allons maintenant considérer l'aimantation M comme une variable (de configuration) au même titre, par exemple que la déformation élastique. Le problème réside dans la connaissance de M en relation avec les différentes variables comme l'excitation du champ H et l'induction B qui sont liées par la relation 2.5

### 3.6.1 Excitation du champ H comme variable indépendante

Dans certaines situations expérimentales, il est plus facile de contrôler l'excitation du champ interne H qui vérifie le théorème d'Ampère. Ceci est le cas du barreau magnétique allongé, voir la fig.12a).

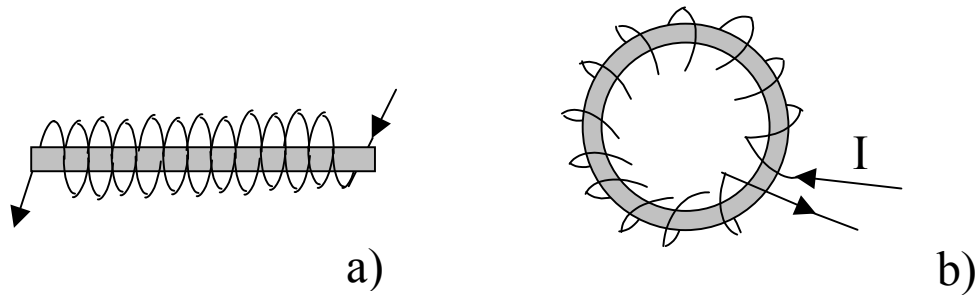


Figure 12 Echantillon sous la forme a) d'un barreau cylindrique b) d'un tore

Soit  $\ell$  sa longueur. Ce barreau est entouré d'un bobinage régulier constitué de  $N$  spires parcourues par un courant  $I$ . Nous avons vu précédemment que si le barreau est suffisamment long il n'existe pas de champ démagnétisant. L'application du théorème d'Ampère indique que l'excitation vaut:  $H = NI/\ell$ .

Dans le cas de la géométrie torique fig.12b), l'échantillon magnétique à la forme d'un anneau de périmètre  $\ell$  et de section droite  $S$ . Il est encore entouré d'un bobinage constitué de  $N$  spires magnétiques réparties régulièrement et parcourues par un courant  $I$ . Le champ dans le matériau doit donc être orthoradial et, avec l'hypothèse  $S \ll \ell^2$ , il s'écrit:  $\vec{H} = (NI/\ell) \vec{e}_\theta$ . Ici encore le champ démagnétisant  $y$  est pratiquement nul.

### 3.6.2 Différents types de comportements magnétiques

Selon le type de matériau considéré, nous verrons que les comportements magnétiques sont très différents. Nous nous intéresserons dans ce paragraphe qu'à une classe simple de matériaux présentant une réponse linéaire:

$$M_i = \sum \chi_{ij} H_j$$

où  $\chi$  (ici un tenseur dont les coefficients sont sans dimension) est appelé susceptibilité magnétique. L'étude des propriétés énergétiques montre que le tenseur susceptibilité est symétrique:  $\chi_{ij} = \chi_{ji}$ . Il existe donc un système d'axes dans lequel la représentation du tenseur susceptibilité est diagonal.

Si de plus ce matériau est isotrope, c'est à dire que ses propriétés magnétiques restent les mêmes dans toutes les directions de l'espace, cela entraîne une conséquence immédiate sur la forme du tenseur. Pour cela étudions les nouvelles propriétés de symétrie du milieu. Pour ce faire, appliquons un champ  $\vec{H}$  uniforme selon une direction que l'on nomera  $OZ$ . Supposons que l'aimantation du milieu  $\vec{M}$  fasse l'angle  $\theta$  avec  $OZ$ . Faisons subir au milieu magnétique une rotation quelconque autour de  $OZ$ . La rotation en bloc de tout le problème fait que  $\vec{M}$  doit subir la même rotation  $\vec{M} \rightarrow \vec{M}'$ . Or l'isotropie entraîne que cette rotation ne doit avoir aucun effet sur

les propriétés magnétiques du matériau. Il s'en suit que  $\vec{M} = \vec{M}'$ . Cette condition ne peut se réaliser que si l'aimantation est parallèle à l'axe de rotation, c'est à dire colinéaire au champ appliqué. Le tenseur susceptibilité ne possède donc que des éléments diagonaux qui de plus sont égaux entre eux. Il s'agit donc d'un simple scalaire  $\chi$

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

La susceptibilité magnétique varie sur une très grande plage de valeurs depuis environ  $10^{-5}$  pour les matériaux faiblement magnétiques (e.g. diamagnétiques et paramagnétiques) jusqu'à des valeurs d'environ  $10^{+6}$  pour des matériaux ferromagnétiques "ultra doux".

De ce qui précède la susceptibilité est une grandeur locale. Elle peut donc dépendre du point considéré dans le matériau. Si le matériau est en outre homogène alors la susceptibilité est identique en tout point du matériau. De tels matériaux sont appelés milieux *Linéaires Homogènes et Isotropes* (LHI). La susceptibilité est une simple constante qui caractérise le matériau. On introduit aussi la perméabilité magnétique  $\mu$  définie comme:

$$\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_o(1 + \chi)\vec{H} = \mu \vec{H}$$

et la perméabilité relative (grandeur sans dimension)  $\mu_r = \mu/\mu_o$

$$\vec{B} = \mu_r \cdot \mu_o \vec{H}$$

A partir de la fig.12 on a une idée de la mesure de la perméabilité magnétique. La connaissance de l'intensité du courant permet de connaître la valeur de H dans le tore magnétique. Supposons que ce courant soit alternatif  $I=I_o \sin \omega t$ . Si l'on adapte un second enroulement de  $N_2$  spires (circuit ouvert) la mesure de la ddp E aux bornes, due aux variations de flux magnétique, donne  $E = -\frac{d\Phi}{dt}$  soit  $E = -N_2 S \frac{dB}{dt}$ . Appelons  $\mu$  la perméabilité du matériau constituant le circuit torique, on aura alors:  $E = -\mu N_2 S \frac{dH}{dt} = -\mu N_2 S \omega \frac{NI_o}{\ell} \cos \omega t$ . En l'absence de tout phénomène d'absorption, la ddp sera de la forme  $E = -E_o \cos \omega t$  (algèbre! pas de déphasage alors  $E_o > 0$ ); d'où la valeur de la perméabilité magnétique du matériau torique:  $\mu = N_2 \frac{S}{E_o} \omega \frac{NI_o}{\ell}$

### 3.6.3 Boule magnétique LHI plongée dans un champ uniforme

On dispose d'un solénoïde générant un champ magnétique supposé uniforme et constant de valeur:  $\vec{B}_a = B_a \vec{u}_z$ . On introduit un matériau magnétique LHI de perméabilité relative  $\mu_r$  de forme sphérique, dont le rayon R est faible devant les longueurs caractéristiques du solénoïde. On se propose de calculer le champ effectif régnant maintenant dans ce milieu et en son voisinage.

La mathématique est similaire à celle développée précédemment. En tout point de l'espace, même dans le matériau: celui-ci étant LHI,  $\text{div} \vec{B} = \text{div} \vec{H} = 0$ . On



cherche donc le potentiel magnétique  $V$ , solution de  $\Delta V = 0$ , sous la forme:

$$V = \left(\frac{\alpha}{r^2} + \beta r\right) \cos \theta$$

L'origine des coordonnées est prise au centre de la boule magnétique. Bien évidemment, les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont différentes pour chaque milieu (vide ≠ milieu magnétique). La spécificité du problème se retrouve dans les conditions aux limites à vérifier:

1 → Le potentiel ne peut présenter de singularité au centre de la boule, pour ce milieu le coefficient  $\alpha$  sera donc nul ( $\alpha^{boule} = 0$ ).

2 → pour  $r \rightarrow \infty$   $\vec{H} = -\overrightarrow{grad}V = \vec{H}_a = H_a \vec{u}_z$  (dans le vide  $\vec{B}_a = \mu_o \vec{H}_a$ )

3 → pour  $r=R$  continuité du potentiel (ou de la composante tangentielle de  $\vec{H}$ ,  $\overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \vec{0}$  dans chaque milieu)

4 → pour  $r=R$  continuité de la composante normale de  $\vec{B}$  ( $\text{div} \vec{B} = 0$  dans les deux milieux).

La condition 2 entraîne:  $\beta^{vide} = -H_a$

La continuité du potentiel s'exprime:

$$\frac{\alpha^{vide}}{R^3} - H_a = \beta^{boule} \quad (3.5)$$

Enfin, la continuité de la composante normale du vecteur induction s'écrit:  $\leq$

$$\mu_r \mu_o H_r^{boule} = \mu_o (H_r^{boule} + M_r) = \mu_o H_r^{vide}$$

Dans cette relation, le vecteur  $\vec{M}$  n'est pas supposé connu et fixe selon  $\vec{u}_z$  mais variable et relié au champ dans le matériau par la relation générale que nous venons de décrire dans ce chapitre:

$$\vec{M} = \chi \vec{H}_{boule}$$

Là se situe la différence avec l'exemple traité précédemment. On obtient finalement: pour les potentiels

$$\text{pour } r \leq R \quad V_{boule} = -\frac{3H_a}{\mu_r + 2} r \cos \theta$$

$$\text{pour } r \geq R \quad V_{vide} = \left[ \frac{H_a R^3}{r^2} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} - H_a r \right] \cos \theta$$

A l'intérieur de la boule l'excitation du champ magnétique est encore uniforme

$$r < R \quad \vec{H} = \frac{3}{\mu_r + 2} \vec{H}_a \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = \chi \frac{3}{\mu_r + 2} \vec{H}_a \quad (3.6)$$

On notera que le champ à l'intérieur diffère du champ appliqué par la contribution démagnétisante.

$$\vec{H} = \vec{H}_a + \vec{H}_{demag}$$

avec

$$\vec{H}_{demag} = -\frac{\mu_r - 1}{2 + \mu_r} \vec{H}_a$$

En effet, la boule uniformément aimantée est le siège d'un champ démagnétisant dont nous avons vu qu'il s'écrit:

$$\text{pour } r < R \quad \vec{H}_{demag} = -\frac{\vec{M}}{3} \quad (3.7)$$

Tandis qu'à l'extérieur, dans le vide le champ résultant s'écrit:

$$\begin{aligned} r > R \quad \vec{H} &= \vec{H}_a + \vec{H}_{dip\grave{o}l} \\ \text{avec } \vec{H}_{dip\grave{o}l} &= \frac{1}{4\pi r^3} [3(\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{\mathfrak{M}}] \end{aligned}$$

Cette contribution est directement liée au champ dipolaire (aussi appelé champ de fuite) généré par la boule aimantée le vecteur  $\vec{\mathfrak{M}}$  représentant le moment dipolaire de la boule uniformément aimantée

$$\vec{\mathfrak{M}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{M} = 4\pi R^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \vec{H}_a$$

Pour l'induction du champ magnétique  $\vec{B}$  qui donne accès au flux magnétique, on voit que le milieu canalise les lignes de champ. A cet effet, remarquons que le flux traversant le plan équatoriale (cote  $z=0$ , surface  $S=\pi R^2$ ) de la boule magnétique est égal à  $\Phi = \mu_r \cdot \pi R^2 \mu_0 \frac{3}{\mu_r + 2} H_a$ . Loin de la sphère un flux identique ne se retrouvera qu'à travers une surface qui peut-être jusqu'à trois fois plus grande.

### Diamagnétique parfait

Nous ferons par la suite la connaissance des milieux diamagnétiques qui se caractérisent par une susceptibilité (notée  $\chi : \vec{M} = \chi \vec{H}$ ) négative. On notera le cas particulier du matériau diamagnétique parfait pour le lequel  $\chi = -1$ , c'est la cas des matériaux supraconducteurs. La susceptibilité relative  $\mu_r$  s'écrit:  $\mu_r = 1 + \chi$  et est donc strictement nulle pour un supraconducteur. L'exercice précédent peut être refait dans cette optique, l'étudiant vérifiera que l'induction  $\vec{B}$  est nulle à l'intérieur de la sphère, tandis que les lignes de champ y sont expulsées comme le montre schématiquement la fig.13.

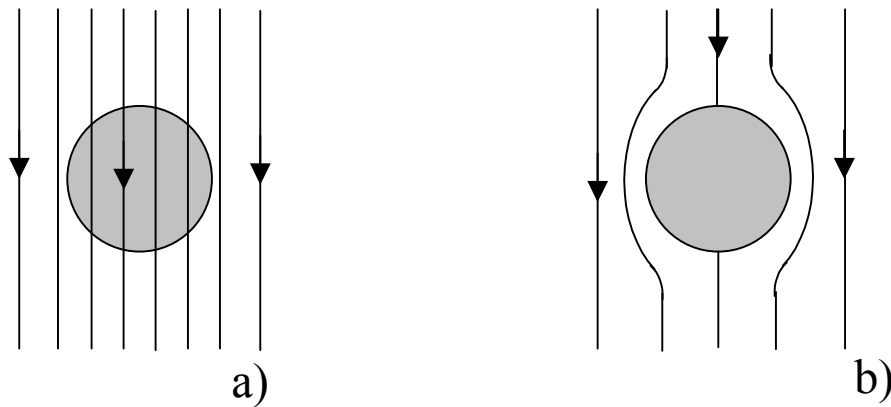


Figure 13 Lignes de l'induction du champ magnétique  $B$  au voisinage d'une sphère placée dans un champ uniforme. En a) sphère de perméabilité magnétique  $\mu = \mu_o$  et en b) de perméabilité nulle  $\mu = 0$ . Dans le cas a) le champ n'est pas perturbé. Par contre, dans le cas b) les lignes de champ sont expulsées de la sphère.

### 3.6.4 Approximation des circuits magnétiques

A l'interface entre deux milieux notés (1) et (2) il y a continuité de la composante tangentielle de l'induction:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{soit} \quad \vec{n}_{12}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

De plus, en l'absence de tout courant de conduction électrique et dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, la composante tangentielle de l'excitation se conserve:

$$\vec{\text{rot}}(\vec{H}) = 0 \quad \text{soit} \quad \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{0}$$

Ceci revient à écrire, dans le référentiel X,Y (fig.14)

$B_{1x} = B_{2x}$  et  $H_{1y} = H_{2y}$ . Dans l'hypothèse où les milieux sont LHI ( $\vec{B}_2 = \mu \vec{H}_2$ ) les lignes de champ (de  $B$  comme de  $H$ ) subissent une réfraction telle que

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Dans le cas d'une interface vide vers milieu ferromagnétique doux de très forte perméabilité ( $\mu_2$  très élevé) les lignes de champ ont tendance à être tangentes à la surface extérieure. Cette propriété est mise à profit dans les circuits magnétiques. Le flux produit par la bobine excitatrice est canalisé par le matériau magnétique comme dans les deux cas représentés dans la fig.12.

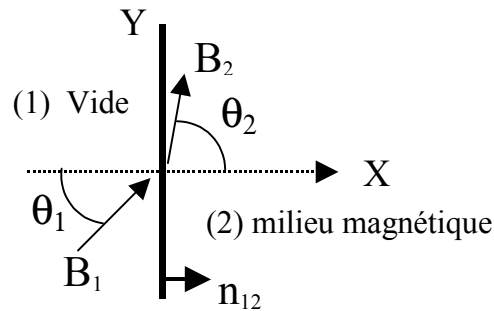


Figure 14 Géométrie illustrant les conditions de passage

### circuit magnétique: géométrie torique

L'approximation des circuits magnétiques consiste à admettre que les lignes de champ sont parallèles entre elles ainsi qu'à la ligne moyenne du tore. La conservation du flux impose que  $B$  est invariant (en module) en tout point du tore, le milieu étant LHI, il en va de même pour  $H$ . En imposant, comme précédemment l'hypothèse  $S \ll \ell^2$ , les lignes de champ ont toutes une longueur identique  $\ell$ . L'application du théorème d'Ampère permet d'écrire

$$H = NI/\ell \quad \text{et} \quad \Phi = BS = \mu_r \mu_o NIS/\ell = NI/\mathfrak{R}$$

où  $\mathfrak{R}$  est la réluctance du circuit. L'étudiant remarquera la similitude avec la loi d'Ohm  $U=RI$ . L'analogie de  $U$  est la force magnétomotrice  $NI$ , celui de la résistance électrique est la réluctance tandis que celui du courant (problème électrique) est ici le flux magnétique.

#### CIRCUIT MAGNETIQUE AVEC ENTREFER

1  $\Rightarrow$  Flux engendré par un solénoïde ( $N$  spires parcourues par un courant  $I$ ) voir fig.15

La partie magnétique (LHI) du circuit est telle que l'excitation du champ  $H_i$  peut-être considérée comme uniforme. Il en va de même pour le champ dans l'entrefer de largeur  $e$  qui sera noté  $H_e$ . L'application du théorème d'Ampère permet d'écrire  $H_i \ell + H_e e = NI$ . La conservation du flux entraîne  $B_i = B_e$  soit  $\mu_r \mu_o H_i = \mu_o H_e$ . On en déduit la valeur du champ utile dans l'entrefer

$$H_e = \frac{NI}{\frac{\ell}{\mu_r} + e}$$

Si le matériau magnétique est de forte perméabilité alors  $H_e \approx NI/e$ . Ceci montre la possibilité de générer un champ important dans l'entrefer. Ce dispositif

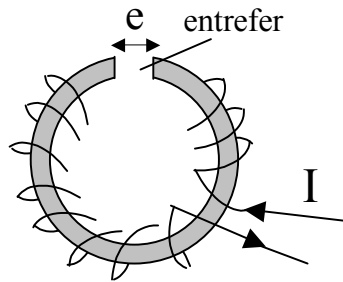


Figure 15 Circuit magnétique avec un entrefer de largeur  $e$ .

peut aussi être utile pour la construction d'un perméamètre en comblant l'entrefer par un matériau magnétique à mesurer.

2  $\Rightarrow$  Flux engendré par un aimant permanent (aimantation  $M$ , longueur  $a$ ) voir fig.16

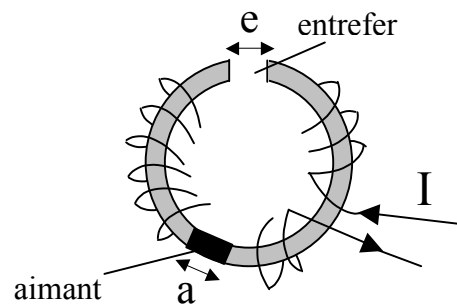


Figure 16 Circuit magnétique comportant un aimant permanent de longueur  $a$  avec entrefer de largeur  $e$

on appelle  $H_a$  l'excitation dans l'aimant. L'application du théorème de Gauss donne:

$$H_a a + H_i \ell + H_e e = 0$$

La continuité du flux entraîne  $B_a = B_i = B_e$  soit:

$$B_a = \mu_o(H_a + M) \quad ; \quad B_i = \mu_r \mu_o H_i \quad \text{et} \quad B_e = \mu_o H_e$$

Si nous admettons que le matériau LHI qui assure la continuité du flux possède une perméabilité magnétique grande alors nous pouvons négliger  $H_i$ . Cette approximation permet d'obtenir la valeur du champ qui règne dans l'entrefer:

$$H_e = \frac{1}{1 + e/a} M$$

### 3.6.5 Exercice: Ventouse Magnétique

Application des circuits magnétiques cet exercice nécessite la connaissance du chapitre traitant de l'énergie.

Soit un circuit magnétique en U de longueur  $\ell$  et de section droite S. Il est approché par une pièce massive d'acier doux (assimilé à un demi-espace de perméabilité infinie). On notera  $e$  la largeur de l'entrefer.

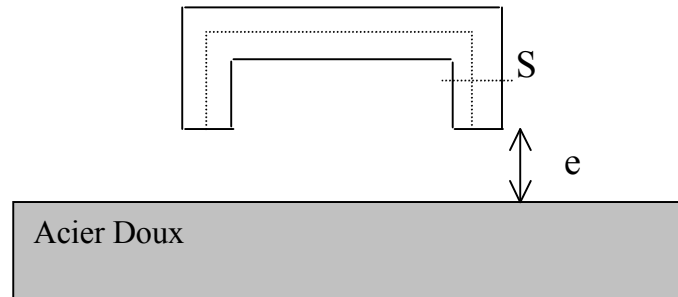


Figure 17 Ventouse magnétique

Remarque 1: Pour la pièce en acier doux. L'approximation perméabilité infinie signifie que l'excitation du champ  $H$  est quasi-nulle dans ce matériau (ce qui n'est pas le cas de  $B$ ).

#### Partie 1

En l'absence de tout courant (vrai) et sous l'hypothèse du circuit magnétique possédant une aimantation  $M$  (uniforme en module et perpendiculaire en tout point au plan de section droite  $S$ ), calculer le facteur démagnétisant de ce système.

On appelle  $H_f$  le champ dans le circuit et  $H_e$  le champ régnant dans l'entrefer. L'approximation des circuits magnétiques entraîne que  $|H_f|$  est constant dans tout le circuit en U et  $|H_e|$  est constant dans l'entrefer.

L'application du théorème d'Ampère sur un contour fermé permet d'écrire

$$H_f \ell + 2 H_e e = 0 \quad (3.8)$$

Au niveau de l'entrefer et à l'interface avec le circuit en U la continuité de la composante normale de  $B$  (application de  $\text{div}B=0$ ) conduit à la relation:

$$\mu_o H_e = \mu_o (H_f + M) \quad (3.9)$$

On en déduit la valeur de  $H_f$

$$H_f = -\frac{1}{1 + \frac{\ell}{2e}} M$$

Ici  $H_f$  s'assimile à un champ démagnétisant  $H_f = -NM$ , le coefficient du champ démagnétisant  $N$  est égal à

$$N = \frac{1}{1 + \frac{\ell}{2e}} \quad (3.10)$$

Dans l'approximation d'un très faible entrefer  $\ell \gg e$ , alors:  $N \approx 2e/\ell$

## Partie 2

- On entoure le circuit magnétique d'un bobinage régulier de  $n$  spires parcourues par un courant  $I$ . On admet que le circuit magnétique travaille dans sa partie linéaire de perméabilité relative  $\mu_r$

Par application du théorème d'Ampère sur le même contour fermé, on obtient

$$H_f \ell + 2 H_e e = nI \quad (3.11)$$

L'équation constitutive du milieu magnétique du circuit en U donne

$$B = \mu_o(H_f + M) = \mu_o\mu_r H_f$$

soit

$$M = (\mu_r - 1)H_f \quad (3.12)$$

Enfin, la continuité de la composante normale de  $B$  au niveau de l'entrefer nous donne une troisième relation

$$\mu_r H_f = H_e \quad (3.13)$$

La combinaison des trois dernières équations entraîne:

$$M = \frac{(\mu_r - 1)}{(\ell + 2\mu_r e)} nI$$

Sous l'hypothèse:  $e \ll \ell \ll \mu_r e$ , entrefer très faible mais susceptibilité du circuit en U immense. L'équation précédente se simplifie

$$M \approx \frac{nI}{2e} \quad (3.14)$$

## Energie

On prend comme état de référence celui où le courant et l'aimantation sont nuls. Pour atteindre l'état considéré du système (par un processus réversible), on peut procéder en deux étapes. (1) On "crée" la distribution d'aimantation sans champ (c'est à dire en appliquant à l'échelle microscopique sur chaque pôle le couple nécessaire pour l'orienter). On fournit donc l'énergie intrinsèque d'aimantation de la matière (énergie pour compenser l'existence du champ démagnétisant). (2)

L'aimantation étant bloquée, on fait croître tous les courants de zéro à leur valeur nominale.

→ Point (1) Nous verrons que cette contribution se met sous la forme:

$$E_{(1)} = -\frac{1}{2}\mu_o \int_V \vec{H}_a \vec{M} dV = \frac{1}{2}\mu_o N M^2 S \ell$$

Soit à l'aide des résultats de la partie 1:

$$E_{(1)} = \mu_o e M^2 S$$

→ Point (2) cette seconde contribution donne:

$$E_{(2)} = \frac{1}{2}\mu_o \int_V H_o^2 dV$$

$H_o$  étant le champ que produit le courant électrique seul en l'absence de matière aimantée. Soit:

$$E_{(2)} = \frac{1}{2}\mu_o \left(\frac{nI}{\ell}\right)^2 S \ell = \frac{1}{2}\mu_o \frac{n^2 S}{\ell} I^2$$

Au final, l'énergie totale E somme de ces deux contributions est alors obtenue, en exprimant M en fonction de I éq:3.14

$$E = \frac{1}{2}\mu_o n^2 S \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{l}\right) I^2$$

Dans l'approximation  $e \ll \ell$  l'énergie totale se réduit à:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu_o n^2 S \frac{I^2}{2e} \\ E &= \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \Phi I \end{aligned} \quad (3.15)$$

### Effet ventouse: calcul de la force

→ A courant I constant:

Nous appelons F la force  $\delta e$  une variation infinitésimale de la distance d'entrefer, la variation d'énergie correspondant  $\delta E$ , en n'omettant pas de compenser la variation du flux magnétique  $\Phi = LI$  dans le bobinage (pour maintenir I=constant) s'écrit:

$$\delta E = -F \delta e + I \delta \Phi$$

Mais  $\delta \Phi = I \delta L$  et  $\delta E = \frac{1}{2} \delta L I^2$  ceci permet d'écrire

$$\frac{1}{2} I^2 \delta L = -F \delta e + I^2 \delta L \quad (3.16)$$



donc

$$F = \frac{1}{2} \frac{\delta L}{\delta e} I^2$$

De l'éq:3.15 on tire:

$$L = \frac{\mu_0 n^2 S}{2e} \quad \text{soit} \quad \delta L = -\frac{\mu_0 n^2 S}{2e^2} \delta e \quad (3.17)$$

en reportant dans l'éq:3.16 nous obtenons la formule de la force (et pour les deux entrefer  $\times 2$ ):

$$F = -\frac{\mu_0 n^2 S}{2e^2} I^2 = -\frac{1}{2} \mu_0 M^2$$

Le signe moins indiquant la nature attractive de la force.

→ Action à flux magnétique constant

Le champ électromoteur est nul donc la variation de l'énergie totale au niveau d'un entrefer pour une variation  $\delta e$  exprime purement le travail mécanique et donne

$$\delta E = -F \delta e$$

soit

$$\delta E = \delta\left(\frac{1}{2} L I^2\right) = \frac{1}{2} I^2 \delta L + L I \delta I$$

Sachant que  $\Phi = cte$ , on peut écrire  $\delta\Phi = 0 = L\delta I + I\delta L$  et donc

$$\delta E = -\frac{1}{2} I^2 \delta L$$

L'utilisation de l'éq3.17 nous livre alors la formule finale

$$-F \delta e = I^2 \frac{\mu_0 n^2 S}{2e^2} \delta e$$

L'expression analytique de la force étant alors similaire à celle du cas précédent.

## Chapter 4 MOMENT DANS UN CHAMP

### 4.1 Précession de Larmor

Soit une particule ponctuelle chargée ( $q$ ) possédant un moment cinétique  $\vec{L}$ . Ce moment cinétique s'écrit classiquement:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m \vec{v}$$

A tout moment cinétique peut être associé un moment (dipolaire) magnétique  $\vec{\mathfrak{M}}$  de nature orbital que l'on exprime comme

$$\vec{\mathfrak{M}} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge q \vec{v}$$

On note que ces deux moments sont proportionnels:

$$\vec{\mathfrak{M}} = \gamma \vec{L}$$

Le coefficient  $\gamma$  est appelé rapport gyromagnétique. Pour un électron de charge  $q=-e$  ; ce rapport vaut  $\gamma = -e/2m$  pour la partie orbitale et  $-e/m$  pour la partie de spin (voir chapitre résonance).

Nous ne considérerons dans ce chapitre que le cas d'un simple moment d'origine orbital. Le moment magnétique peut aussi s'exprimer comme:

$$\vec{\mathfrak{M}} = -\frac{e\hbar}{2m} \vec{\mathfrak{L}} = -\mu_B \vec{\mathfrak{L}}$$

ou,  $\vec{\mathfrak{L}}$  est le moment cinétique orbital (en unité  $\hbar$  :  $\vec{L} = \hbar \vec{\mathfrak{L}}$ ) caractérisé par le nombre quantique  $\ell$  ( $= 0, 1, \dots, n - 1$ ) ;  $\mu_B$  est appelé le magnéton de Bohr et vaut:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0.927 \cdot 10^{-23} \text{ A.m}^2$$

Plongé dans un champ d'induction magnétique  $\vec{B}$ , l'énergie potentielle associée est égale à

$$U_{pot} = -\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B}$$

On montre (voir analogie avec le dipôle électrique) que ce moment (réputé constant en norme) est soumise à une force

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} [\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B}]$$

nulle si le champ est uniforme et à un couple

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$$

Le théorème du moment cinétique indique que la dérivée par rapport au temps du moment cinétique prise par rapport à un point fixe O d'un référentiel galiléen est égale au moment des forces appliquées à cette particule:  $\vec{\Gamma}$ , par rapport à ce même point O. Si le moment magnétique n'est soumis (*uniquement*) qu'à l'effet du champ appliqué .

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$$

On obtient de la sorte l'équation d'évolution du moment magnétique:

$$\frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} = \gamma \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B} \quad (4.1)$$

#### 4.1.1 Conservation de la norme de $\mathfrak{M}$

Multiplions scalairement l'équation 4.1 par  $\vec{\mathfrak{M}}$

$$\vec{\mathfrak{M}} \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} = \gamma \vec{\mathfrak{M}} (\vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$$

Ceci traduit la conservation de la norme du moment magnétique:

$$\vec{0} = \vec{\mathfrak{M}} \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\mathfrak{M}^2}{dt} \quad \rightarrow \|\vec{\mathfrak{M}}\| = Cte.$$

#### 4.1.2 Conservation angulaire

Si maintenant nous multiplions scalairement l'équation 4.1 par  $\vec{B}$

$$\vec{B} \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} = \gamma \vec{B} (\vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$$

Sous l'hypothèse d'un champ magnétique constant dans le temps

$$\vec{0} = \vec{B} \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} = \frac{d(\vec{B} \vec{\mathfrak{M}})}{dt} \quad \rightarrow \vec{B} \vec{\mathfrak{M}} = Cte.$$

Ceci entraîne simultanément la constance dans le temps de l'énergie ainsi que de l'angle entre la direction d'application du champ et celle du moment magnétique

$$\vec{B} \vec{\mathfrak{M}} = B \mathfrak{M} \cos(\vec{B} \vec{\mathfrak{M}}) = Cte$$

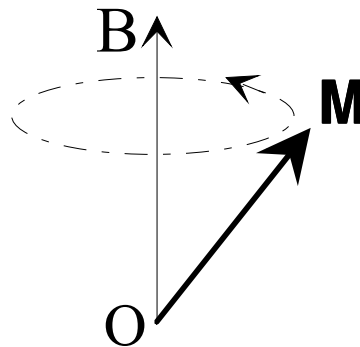


Figure 1 Précession de Larmor

#### 4.1.3 Nature du mouvement

L'analyse précédente permet de prédire que le vecteur  $\vec{\mathfrak{M}}$  va subir une rotation autour de la direction du champ appliqué tout en conservant une composante parallèle à  $\vec{B}$  constante. On se souvient d'un résultat important obtenu en mécanique: soit  $\vec{OM}$  un vecteur fixe par rapport à un référentiel  $R_2$  lui-même en rotation par rapport au référentiel  $R_1$  auquel est attachée la base  $b_1$ . La dérivée par rapport au temps du vecteur  $\vec{OM}$  dans la base  $b_1$  est égale à:

$$\left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right]_{b_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

le vecteur  $\vec{\omega}$  traduisant la rotation du référentiel  $R_2$  autour de  $R_1$ . Ce résultat est directement applicable à la relation 4.1

$$\frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mathfrak{M}} \quad (4.2)$$

avec  $\omega = -\gamma B$ . Ceci correspond à une fréquence  $\nu_L$  ( fréquence de Larmor) pour la partie orbitale électronique dont la valeur par unité de champ est égale à

$$\frac{\nu_L}{B} = \frac{1}{2\pi} \frac{e}{2m} = 1.4 \cdot 10^{10} \text{ Hz/Tesla}$$

→ le champ B ici utilisé se réduit à la forme:  $\vec{B} = \mu_o \vec{H}$

→ on note que le mouvement de précession est d'autant plus rapide que le champ appliqué est élevé.

→ La pulsation est indépendante de la valeur du moment magnétique. Toutefois, elle dépend de sa nature. Cette pulsation sera deux fois plus grande pour un moment de spin que pour un moment magnétique d'origine purement orbital.

→ On ne peut calculer l'angle entre  $\vec{B}$  et  $\vec{\mathfrak{M}}$ .

Ces propriétés gyromagnétiques sont à l'origine des mécanismes de résonances magnétiques, nucléaires, paramagnétiques, ferromagnétiques.. qui feront l'objet du chapitre suivant.

## 4.2 Effet de l'amortissement

### 4.2.1 Equation de Landau-Lifschitz-Gilbert

Un moment qui précesse autour du champ n'est pas à l'équilibre thermodynamique car le niveau d'énergie minimum correspond à l'alignement le long du champ [  $p(\theta) \approx \exp(\vec{B} \cdot \vec{\mathfrak{M}}/kT)$  ]. Dans l'analyse précédente, l'énergie du système est en fait conservée, l'aimantation se trouvant sur un cône d'angle constant avec la direction du champ. L'établissement de l'équilibre va se traduire par une relaxation sous forme d'échange d'énergie (dissipation) avec l'extérieur. On s'attend ainsi, à ce que l'aimantation atteigne sa valeur conditionnée par l'équilibre thermique avec le milieu en présence du champ B. Cette valeur d'équilibre s'écrit:  $\vec{\mathfrak{M}}_{\text{lim}} = (\chi/\mu_o) \vec{B}$  l'aimantation s'alignant avec le champ appliqué.

Remarquons que les trois vecteurs

$$\vec{\mathfrak{M}}, \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B} \text{ et } \vec{\mathfrak{M}} \wedge (\vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B})$$

sont orthogonaux ( ils forment une base dans  $\mathbb{R}^3$  ) et permettent d'exprimer l'évolution dans le temps du moment magnétique sous la forme générale:

$$\frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} = a \vec{\mathfrak{M}} + b \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B} + c \vec{\mathfrak{M}} \wedge (\vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}) \quad (4.3)$$

Nous allons traiter le cas plus simple où le moment dipolaire magnétique n'est pas affecté, en amplitude, par le champ mais dont seule, sa direction peut varier (approximation du micromagnétisme):  $\|\vec{\mathfrak{M}}\| = \mathfrak{M} = Cte$ .

Cette relation de contrainte entraîne:  $\vec{\mathfrak{M}} \cdot (d\vec{\mathfrak{M}}/dt) = 0$ . Il s'en suit que le coefficient a doit être nul.

Le second terme que nous avons vu plus haut traduit le mouvement de précession le coefficient b s'identifiant au rapport gyromagnétique  $\gamma$ .

Enfin, le troisième terme,  $c \vec{\mathfrak{M}} \wedge (\vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B})$ , a été introduit de façon phénoménologique par Landau (1935) pour traduire la dissipation. Le lecteur se convaincra qu'il traduit l'effet d'un couple ramenant  $\vec{\mathfrak{M}}$  vers le champ. Toutefois, dans la description de Landau-Lifshitz le mouvement se décompose en une précession autour de B qui n'est pas affectée par la dissipation et un mouvement d'alignement vers B qui en dépend. Pour lever cette difficulté, Gilbert (1955) a proposé une présentation sensiblement différente de l'équation du mouvement la forme:

$$\frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} = \gamma \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B} + \frac{\alpha}{\mathfrak{M}} \vec{\mathfrak{M}} \wedge \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} \quad (4.4)$$

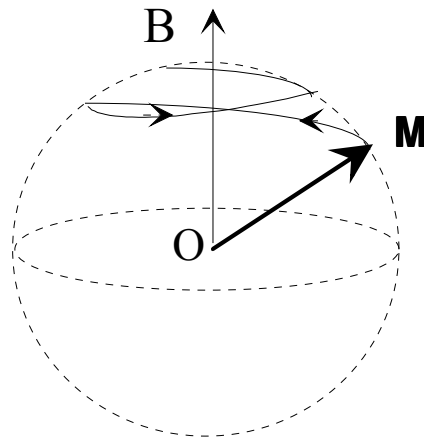


Figure 2 Mécanisme de dissipation: alignement du moment sur le champ appliqué

où  $\alpha$  représente un coefficient de dissipation (sans dimension) dont la valeur peut-être obtenue par résonance magnétique (voir chapitre suivant). Nous verrons par la suite qu'il en découle que la fréquence de précession est affectée par la dissipation.

Exercice: Montrer que les éq. 4.3 et 4.4 sont équivalentes avec  $b = \gamma / (1 + \alpha^2)$  et  $c = -\alpha\gamma / (1 + \alpha^2)$  ( $c > 0$ )

#### 4.2.2 Conservation de la norme de M

On notera que l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert conserve la norme du vecteur moment dipolaire magnétique.

#### 4.2.3 Dissipation d'énergie

La variation d'énergie est donnée par

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial M} \frac{dM}{dt} = -\vec{B} \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt}$$

A partir de la relation de Landau-Lifschitz-Gilbert [LLG] (équation 4.4) on obtient:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\alpha}{\gamma \mathfrak{M}} \left( \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} \right)^2$$

Le coefficient d'amortissement  $\alpha$  doit donc être positif (attention on se rappelle que le rapport gyromagnétique  $\gamma$  est négatif). En son absence ( $\alpha = 0$ ) l'énergie se conserve.

#### 4.2.4 Résolution de l'équation de L.L.G.

Nous nous proposons de résoudre l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert en présence d'un champ statique appliqué selon un axe que nous prendrons comme axe OZ. En

coordonnées sphériques (voir l'annexe de ce chapitre) l'aimantation et le champ seront repérés par

$$\vec{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{B} = B \cos \theta \vec{u}_r - B \sin \theta \vec{u}_\theta$$

si pendant l'intervalle de temps  $dt$  la direction de  $\vec{\mathfrak{M}}$  passe de  $\theta, \varphi$  à  $\theta + d\theta, \varphi + d\varphi$ , sa variation s'écrit:

$$\frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} = \mathfrak{M} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \mathfrak{M} \left( \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi \right)$$

En projetant l'équation du mouvement sur  $\vec{u}_\theta$ ; on obtient

$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha \sin \theta \frac{d\varphi}{dt}$$

tandis que la projection sur  $\vec{u}_\varphi$  donne

$$\sin \theta \frac{d\varphi}{dt} = -\gamma B \sin \theta + \alpha \frac{d\theta}{dt}$$

La combinaison des deux relations permet d'écrire les équations des évolutions temporelles de chacune des variables  $\theta$  et  $\varphi$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{\gamma B}{1 + \alpha^2} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\gamma \alpha B}{1 + \alpha^2} \sin \theta \end{aligned}$$

### Pas d'amortissement

Pour  $\alpha = 0$  on retrouve bien  $\theta = Cte.$  et  $\frac{d\varphi}{dt} = -\gamma B = \omega_o$  (pulsation de Larmor).

### Présence d'amortissement

La résolution des équations donne:

$$\varphi = \frac{\omega_o}{1 + \alpha^2} t + Cte$$

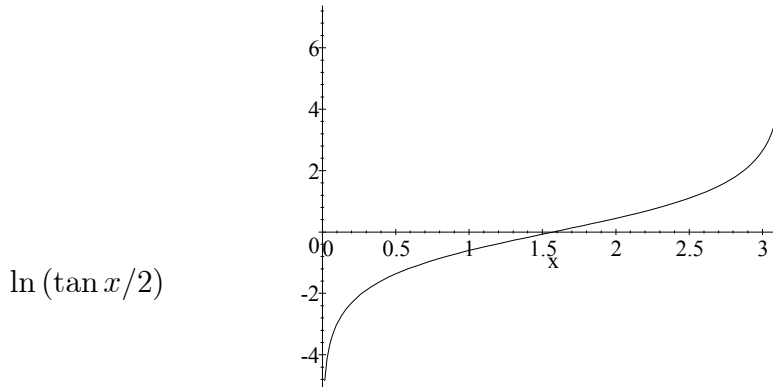
Il existe encore un mouvement de précession autour de B mais à une fréquence angulaire plus faible.

$$\omega = \frac{\omega_o}{1 + \alpha^2}$$

Par ailleurs la seconde équation admet comme solution:

$$Ln \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| = \frac{\gamma \alpha B}{1 + \alpha^2} t + Cte$$

L'évolution qualitative de  $\vec{\mathfrak{M}}$  est représentée sur la fig.2 tandis que la variation quantitative de l'angle  $\theta$  est reportée sur la dernière figure de ce chapitre.



Evolution de la fonction  $\text{Ln}(\tan(X/2))$  en fonction de  $x$ .

Sur cette même figure: en abscisse, l'angle  $\theta$  (noté  $x$  sur la figure) est exprimé en radian, l'axe des ordonnées "Y" porte l'échelle proportionnelle au temps (attention au signe) en unité réduite; le temps réel "t" s'obtient par

$$t = \frac{1 + \alpha^2}{\gamma \alpha B} Y$$

Le temps pour une période de précession  $T$  est donné par  $T=2\pi/\omega$  soit  $T=2\pi(1+\alpha^2)/\omega_o$  [pour un champ  $B$  de 1 Tesla,  $T=7.10^{-11}$  s]. Si l'on part d'un moment dipolaire à  $90^\circ$  de la direction du champ l'alignement nécessitera une durée (ou temps de relaxation) voisine de  $t_{relax}=4.(1+\alpha^2)/(\gamma \alpha B)$ . Le nombre de tours de précession avant l'alignement (figure 2) s'obtient à l'aide du rapport  $t_{relax}/T=4/(2\pi\alpha)$ . Pour un coefficient d'amortissement  $\alpha \approx 0.1$  (ce qui est le cas des métaux ferromagnétiques) le nombre de tours de précession avant l'alignement serait voisin de la dizaine.

### 4.3 Annexe

Quelques rappels bien utiles:

Coordonnées sphériques:  $r, \theta$  et  $\varphi$

Vecteurs de base ( $b_2$ ):  $\vec{u}_r ; \vec{u}_\theta ; \vec{u}_\varphi$

exprimées dans la base cartésienne ( $b_1$ ) fixe pour l'expérimentateur:  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$   
(voir fig.1)

$$\vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$



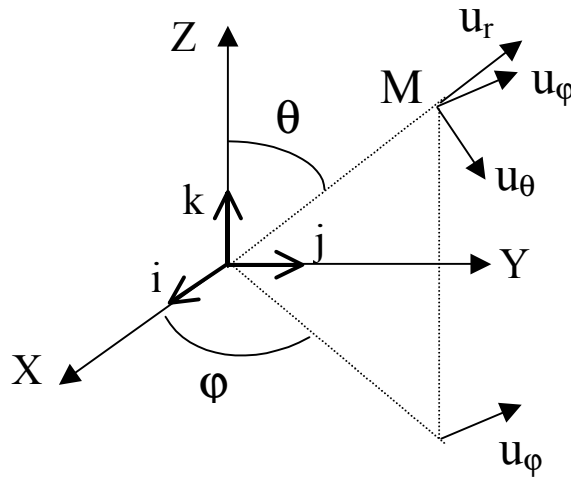


Figure 3 Coordonnées sphériques

le calcul des coefficients inverses donne

$$\vec{i} = \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_r + \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_\theta - \sin \varphi \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{j} = \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_r + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_\theta + \cos \varphi \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{k} = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$$

les dérivées des vecteurs de la base  $b_2$  par rapport à  $b_1$  exprimées dans  $b_2$  s'écrivent:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_r}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} &= -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r + \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi \\ \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} &= -\sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_r - \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

## Chapter 5

# RÉSONANCE MAGNÉTIQUE

### 5.1 Introduction:

On se propose de discuter les effets dynamiques de l'aimantation au voisinage de la résonance dans les solides et les liquides. Ceci recouvre:

- la résonance paramagnétique électronique (RPE)
- la résonance ferromagnétique
- la résonance magnétique nucléaire (RMN)

Un traitement unique sera fait dans une vision soutenue par la mécanique classique. Les moments cinétiques (et magnétiques) pourront donc prendre toutes les directions de l'espace (absence de quantification). Toutefois, l'ultime paragraphe évoquera brièvement l'aspect quantique de la résonance.

### 5.2 Rappels sur la précession libre

On repart de l'équation du mouvement pour un moment isolé plongé dans un champ  $\vec{B} = B\vec{u}_z$

$$\frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} = \gamma\vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B} \quad (5.1)$$

On admettra une même évolution pour l'aimantation résultante du matériau  $\vec{M}$  soit:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma\vec{M} \wedge \vec{B}$$

*Ici, l'induction  $\vec{B}$  doit s'entendre comme  $\vec{B} = \mu_o\vec{H}_{eff}$ , où le champ effectif est le champ réellement ressenti par l'aimantation au point de calcul. Ce champ (voir polycopié suivant) est égal au champ appliqué par l'expérimentateur  $H$  mais il provient de son environnement à travers l'échange ainsi que de la forme du corps (champ démagnétisant) et d'une éventuelle anisotropie des propriétés magnétiques du matériau. Dans ce paragraphe nous ne tiendrons compte que du champ appliqué:  $\vec{B} = \mu_o\vec{H}$ .*

L'équation 5.1 en projection sur les trois axes donne:

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma B M_y = -\omega_o M_y$$

$$\begin{aligned}\frac{dM_y}{dt} &= -\gamma B M_x = +\omega_o M_x \\ \frac{dM_z}{dt} &= 0\end{aligned}$$

En posant

$$\omega_o = -\gamma B = \frac{+e}{2m} B = \frac{+e}{2m} \mu_o H$$

( $\gamma = -\frac{e}{2m}$  dans le cas orbital voire  $\gamma = -\frac{e}{m}$  pour un magnétisme de spin pur) la solution peut s'écrire

$$\begin{aligned}M_x &= M_p \cos \omega_o t \\ M_y &= M_p \sin \omega_o t\end{aligned}$$

ou, sous forme complexe  $\widetilde{M} = M_x + iM_y = M_p e^{i\omega_o t}$

L'aimantation précesse dans le sens direct autour de l'axe OZ portant +B à la vitesse angulaire  $\omega_o$ . La encore, l'amplitude  $M_p$  ne peut être calculée.

### 5.3 Régime forcé sans amortissement

On ajoute au champ constant et uniforme  $\vec{B}$ , un faible champ planaire r.f. (radiofréquence), champ tournant  $\vec{b}(\omega, t) = \mu_o \vec{h}$  du type

$$\begin{aligned}b_x &= b \cos \omega t \\ b_y &= b \sin \omega t\end{aligned}$$

soit encore en notation complexe:  $\widetilde{b} = b_x + ib_y = b e^{i\omega t}$

Pour les amplitudes, on impose  $B \gg b$ . De ce fait la composante longitudinale  $M_z$  doit être beaucoup plus importante que la composante transverse ou planaire (plan XOY). L'équation du mouvement s'écrit:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= -\omega_o M_y - \gamma b_y M_z \\ \frac{dM_y}{dt} &= +\omega_o M_x + \gamma b_x M_z \\ \frac{dM_z}{dt} &= \gamma (M_x b_y - M_y b_x)\end{aligned}$$

Selon nos hypothèses:  $M_z \gg M_x$ ;  $M_z \gg M_y$  et  $B \gg b$ , on néglige par la suite les termes du type  $M_x b_y$ ,  $M_y b_x$  ... comme étant des infiniments petits du premier ordre devant des termes en  $M_z b_y$  ou  $M_x B$ . Ceci revient à linéariser l'équation LLG. De ce fait on admet que:

$$\frac{dM_z}{dt} \approx 0$$

la composante longitudinale (le long du champ statique B) est donc constante et peu différente de la norme totale de l'aimantation que l'on notera  $M_S$  (aimantation à saturation). Nous avons donc deux équations couplées à résoudre

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= -\omega_o M_y - \gamma M_S b_y \\ \frac{dM_y}{dt} &= +\omega_o M_x + \gamma M_S b_x\end{aligned}$$

En multipliant par  $i$  la seconde puis en effectuant la somme membre à membre, on obtient

$$\frac{d\tilde{M}}{dt} = +i\omega_o \tilde{M} + i\gamma M_S \tilde{b}$$

On cherche la solution en régime forcé sous la forme

$$\tilde{M} = \tilde{m} e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \tilde{m} = m e^{i\varphi}$$

$m$  étant la norme de la composante transverse (planaire) de l'aimantation. On obtient alors:

$$\tilde{m} = +\frac{|\gamma| M}{\omega_o - \omega} b \quad (5.2)$$

La composante planaire tourne en phase avec le champ rf. à basse fréquence ( $\omega < \omega_o$ ) puis, au delà de la résonance qui se produit pour  $\omega = \omega_o$ , en opposition de phase. Ce modèle, ne faisant pas intervenir de dissipation, prévoit une valeur infinie de  $m$  à la résonance. En régime statique:  $\omega = 0$ , le rapport entre la composante longitudinale  $M$  et transverse  $m$  est donné par l'éq.5.2 et correspond au rapport des champs:  $m/M=b/B$ .

## 5.4 Effet de l'amortissement

### 5.4.1 Landau-Lifschitz-Gilbert, Equations de Bloch

Diverses formes pour traduire la dissipation d'énergie, c'est à dire l'alignement final de l'aimantation avec le champ appliqué, ont été proposées. Nous garderons la forme proposée par Gilbert (1955) que nous avons déjà introduite et qui garde l'avantage de conserver la norme de l'aimantation ce qui semble être le cas pour les matériaux ferromagnétiques. Toutefois, d'autres formes ont été proposées comme les équations de Bloch (nous renvoyons le lecteur intéressé au chapitre sur les résonances magnétiques du livre de C. Kittel : Physique de l'état solide). Ce type d'équations est très utilisé notamment en RMN. Le terme de rappel (dissipation) de  $M$  vers  $B$  prend la forme:  $[M_{final}-M(t)]/\tau$ , où  $\tau$  est le temps caractéristique du processus de relaxation.

Rappel de l'équation de LLG:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma(\vec{M} \wedge \vec{B}) + \frac{\alpha}{M}(\vec{M} \wedge \frac{d\vec{M}}{dt})$$

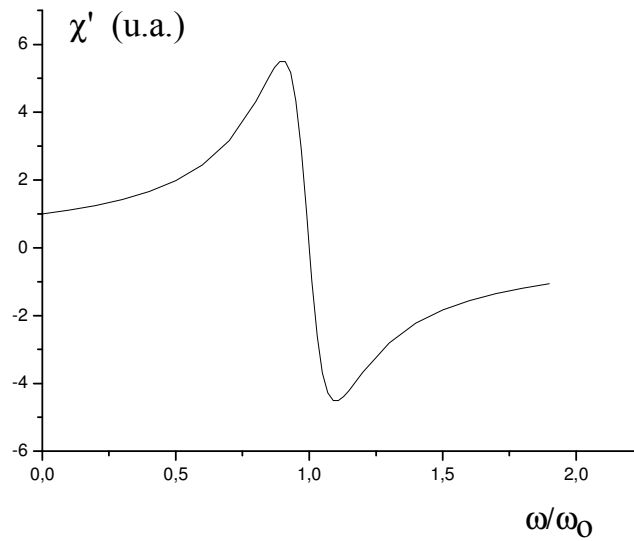


Figure 1 Variation de la partie réelle de la susceptibilité magnétique (en phase) exprimée en unité arbitraire (u.a.) fonction de la pulsation du champ excitateur tournant (amortissement=0.1) .

Avec le même ordre d'approximation, la composante longitudinale est quasiment constante:  $\frac{dM_z}{dt} \simeq 0$ , les composantes selon OX et OY de l'aimantation s'écrivent alors:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= -\omega_o M_y - \gamma M_S b_y - \alpha \frac{dM_y}{dt} \\ \frac{dM_y}{dt} &= +\omega_o M_x + \gamma M_S b_x + \alpha \frac{dM_x}{dt}\end{aligned}$$

Ce couple d'équations couplées est résolu dans l'ensemble des complexes. On multiplie par  $i$  la seconde que l'on additionne à la première

$$\frac{d\tilde{M}}{dt} = +i\omega_o \tilde{M} + i\gamma M_S \tilde{b} + i\alpha \frac{d\tilde{M}}{dt}$$

Ceci nous amène à résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$(1 - i\alpha) \frac{d\tilde{M}}{dt} - i\omega_o \tilde{M} = +i\gamma M_S \tilde{b}$$

Dont la solution, en régime forcé s'écrit:

$$\tilde{m} = +|\gamma| M \frac{(\omega_o - \omega) - i\alpha\omega}{(\omega_o - \omega)^2 + \alpha^2\omega^2} \tilde{b}$$

ou encore, en faisant apparaître la partie en phase (dispersion) et en quadrature (dissipation) de la susceptibilité magnétique ( $\tilde{b} = \mu_o \tilde{h}$ ).

$$\tilde{m} = (\chi' - i\chi'') \tilde{h}$$

avec

$$\chi' = \mu_o |\gamma| M \frac{(\omega_o - \omega)}{(\omega_o - \omega)^2 + \alpha^2 \omega^2}$$

et

$$\chi'' = \mu_o |\gamma| M \frac{\alpha \omega}{(\omega_o - \omega)^2 + \alpha^2 \omega^2}$$

Un phénomène de résonance apparaît pour une pulsation du champ  $b$  égale à  $\omega = \omega_o / \sqrt{1 + \alpha^2}$ , c'est à dire très voisine de la pulsation Larmor de précession libre  $\omega_o$ . La partie dissipative (imaginaire) ne présente une valeur appréciable qu'au voisinage de la résonance. La largeur à mi-hauteur  $\Delta\omega$ , pour de faible amortissement est voisine de  $\Delta\omega = 2\alpha\omega_o$ . On définit le facteur de qualité de la résonance par  $Q = \Delta\omega / \omega_o = 2\alpha$ . En général, les propriétés demandées à un matériau sont: de posséder une susceptibilité élevée (partie réelle bien sûr) et une fréquence de résonance la plus forte possible. Ces deux courbes sont tracées sur les figures 1 et 2

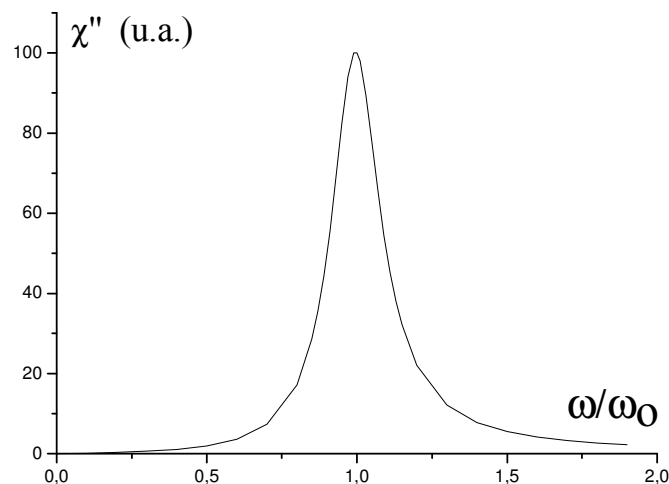


Figure 2 Variation de la partie imaginaire de la susceptibilité magnétique (en quadrature) en fonction de la pulsation du champ tournant  $h$ . Ce terme traduit la dissipation du milieu. (u.a. = unité arbitraire, amortissement=0.1).

### Puissance absorbée

Le couple exercé par le champ tournant sur l'aimantation s'exprime comme

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{b}$$

Rappelons que la composante planaire de l'aimantation et le long du champ  $\vec{b}$  est égale à  $\chi' b / \mu_o$  tandis que la composante planaire en quadrature vaut  $-\chi'' b / \mu_o$ . Le travail effectué, pour une rotation élémentaire  $d\varphi$  est égal à  $dW = \vec{\Gamma} \cdot d\vec{\varphi}$ . On en déduit la puissance absorbée par unité de volume du système

$$\frac{dW}{dt} = \vec{\Gamma} \cdot \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}$$

qui peut s'écrire:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\omega \chi'' b^2}{\mu_o} = |\gamma| M \frac{\alpha \omega^2}{(\omega_o - \omega)^2 + \alpha^2 \omega^2} b^2$$

La puissance absorbée est maximum à la résonance qui se produit exactement pour la pulsation  $\omega = \omega_o$  (voir figure 3)

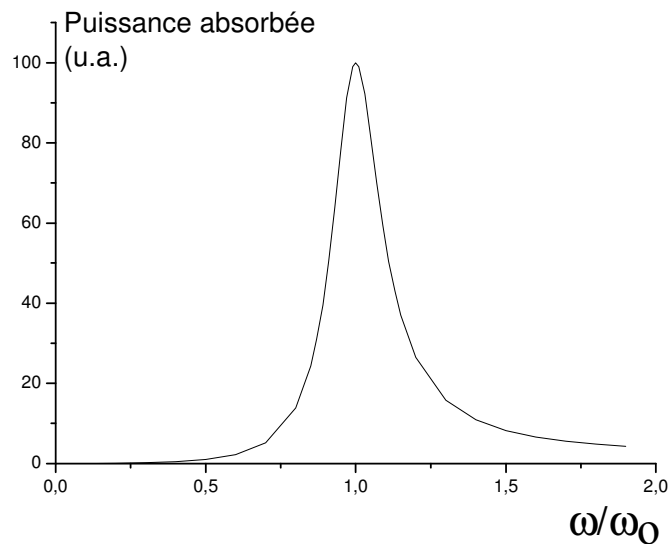


Figure 3 Variation de la puissance absorbée en fonction de la pulsation du champ tournant (amortissement=0.1).

La forme du terme dissipatif de l'équation de LLG prédit une dissipation constante aux très hautes fréquences  $\omega \gg \omega_o$ . La largeur à mi-hauteur du pic d'absorption est égale à  $\Delta\omega = \frac{2\alpha\omega_o}{1-\alpha^2}$ . On remarquera qu'expérimentalement, on fixe la fréquence du champ tournant tandis que les mesures sont faites pour différentes valeurs du champ H. Cette énergie, absorbée par l'aimantation, est fournie par le champ rf. Finalement, elle sera dissipée sous forme de vibrations du réseau du matériau magnétique, la chaleur étant la forme ultime de dégradation de l'énergie.

### 5.4.2 Aspect expérimental

Le schéma de principe du dispositif expérimental pouvant servir à mettre en évidence la résonance magnétique est reporté sur la figure 4. L'échantillon est placé dans l'entrefer d'un électro-aimant qui crée un champ uniforme et constant  $B$ . Une bobine d'inductance à vide  $L_o$  et de résistance  $R_o$  génère le champ rf. (ici uniaxial transverse).

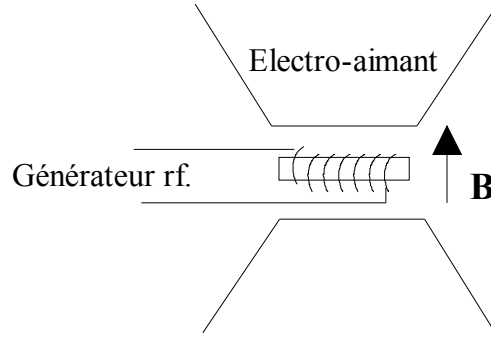


Figure 4 Schéma expérimental d'un dispositif de résonance magnétique

Loi des mailles à vide: avec  $V=V_o e^{i\omega t}$  et  $I=\tilde{I}_o e^{i\omega t}$

$$V = \frac{d\Phi}{dt} + R_o I = \frac{d(bS)}{dt} + R_o I = L_o \frac{dI}{dt} + R_o I$$

En présence du matériau magnétique

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(bS + \mu_o mS)}{dt}$$

où  $S$  est la surface effective de la bobine. Par ailleurs,  $b$  est le champ r.f. et  $m$  est la composante transverse et variable de  $M$ .

Enfin, on a vu que  $m=\chi h = (\chi' - i\chi'')h$ . On en déduit qu'en charge la relation traduisant la loi des mailles s'écrit:

$$V = \frac{d\Phi}{dt} + R_o I = L_o(1 + \chi' - i\chi'') \frac{dI}{dt} + R_o I$$

Cette dernière relation donne

$$V = L_o(1 + \chi') \frac{dI}{dt} + (R_o + \omega\chi''L_o)I$$

En charge, le circuit est donc équivalent à une bobine d'induction effective  $L=L_o(1 + \chi')$  en série avec une résistance effective  $R=R_o + \omega\chi''L_o$ . On peut ainsi mesurer expérimentalement la partie en phase  $\chi'$  et en quadrature  $\chi''$  de la susceptibilité.

Pour la résonance ferromagnétique, l'obtention de fréquences élevées nécessite parfois l'utilisation d'un guide d'onde et d'une cavité hyperfréquence.



## 5.5 Résonance ferromagnétique

La résonance de spins dans les matériaux ferromagnétique est, dans son principe, équivalente à ce que nous venons de décrire. L'aimantation du matériau précesse autour de la direction du champ statique et l'énergie du champ r.f. transverse est fortement absorbée pour une fréquence égale à celle de la précession libre. Toutefois, un certain nombre de remarques doivent être faites:

→a) les composantes transverses de la susceptibilité sont beaucoup plus grandes dans un matériau ferromagnétique, du fait de la valeur élevée de  $M$ , comparées à l'aimantation électronique (ou de spin) voire nucléaire (proton) pour un corps paramagnétique.

→b) La forme du matériau étudié joue un rôle important à travers la présence d'un champ démagnétisant que nous avons introduit dans la partie magnétostatique.

→c) Recherchant un mode uniforme de précession, l'aimantation en tout point du matériau suivant le même mouvement, l'échange ferromagnétique ne sera pas introduit. Toutefois, cet échange entre les spins peut expliquer la finesse des raies de résonance observées.

→d) Les propriétés magnétiques varient selon la direction (anisotropie magnétique), il en ira de même la fréquence de résonance.

### 5.5.1 Champ démagnétisant

Quelques formes géométriques simples (ellipsoïdes de révolution: e.g. la sphère, le film plan) présentent l'avantage d'offrir un champ démagnétisant uniforme dans le volume de l'échantillon, sous réserve - bien sur- d'un échantillon uniformément aimanté. Ce champ démagnétisant, qui prend sa source dans la discontinuité de  $M$  à la surface du matériau, peut se mettre sous la forme simple:

$$(H_d)_i = -N_i M_i$$

$N_i$  étant un coefficient constant et sans dimension, propre à la direction (i). Dans un repère OX,OY,OZ, ces trois coefficients vérifient la relation  $N_x + N_y + N_z = 1$

Sous ces conditions, et en l'absence de terme dissipatif, on peut calculer les fréquences propres de résonance en présence du seul champ statique  $\mu_o H$  toujours appliqué selon Oz. Le champ effectif est ici égal à

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H}_{eff} = \mu_o (\vec{H} + \vec{H}_d)$$

l'équation du mouvement donne, toujours dans l'approximation  $M_z = Cte \approx M$  (norme de l'aimantation) tandis que les deux autres composantes transverses ( $M_x$  et  $M_y$ ) sont supposées encore faibles devant  $M$ .

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} &= \gamma [\mu_o M_y (H - N_z M) + \mu_o M N_y M_y] \\ \frac{dM_y}{dt} &= \gamma [-M \mu_o N_x M_x - \mu_o M_x (H - N_z M)] \end{aligned}$$

on cherche un mouvement de précession en  $\exp(+i\omega t)$ . Les deux équations précédentes s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} i\omega M_x - [\gamma\mu_o H + \gamma\mu_o(N_z - N_y)M]M_y &= 0 \\ i\omega M_y + [\gamma\mu_o H + \gamma\mu_o(N_x - N_z)M]M_x &= 0 \end{aligned}$$

et n'auront de solution que si le déterminant associé est nul

$$\begin{vmatrix} i\omega & -[\gamma\mu_o H + \gamma\mu_o(N_z - N_y)M] \\ [\gamma\mu_o H + \gamma\mu_o(N_x - N_z)M] & i\omega \end{vmatrix} = 0$$

La résonance ferromagnétique (mode uniforme) se produit à la fréquence  $\omega$  telle

$$\omega^2 = \mu_o^2 \gamma^2 [H + (N_x - N_z)M] [H + (N_y - N_z)M]$$

Dans le cas de la sphère:  $N_x = N_y = N_z = 1/3$ , le champ démagnétisant uniforme et isotrope n'influe pas:  $\omega = \mu_o |\gamma| H$

Pour un échantillon sous forme d'une couche mince, deux cas sont à étudier selon la direction du champ appliqué. Premier cas, le champ statique est perpendiculaire à la couche ( $N_z = 1, N_x = N_y = 0$ ) la résonance se situe à

$$\omega = \mu_o |\gamma| (H - M) \quad (5.3)$$

Deuxième cas le champ statique B est appliqué dans le plan de la couche alors:  $N_z = 0, N_x = 1$  et  $N_y = 0$  la fréquence de résonance est ainsi égale à

$$\omega = \mu_o |\gamma| \sqrt{H(H + M)} \quad (5.4)$$

### facteur de Landé (couplage spin-orbite)

Si l'on revient maintenant au moment magnétique, celui ci est défini en mécanique quantique (voir le cours) à partir du moment cinétique totale  $\vec{J}$ . Pour un atome ou un ion libre, le moment cinétique total  $\vec{J} = \hbar \vec{\mathfrak{J}}$  est la somme vectorielle du moment cinétique orbital des électrons  $\vec{L} = \hbar \vec{\mathfrak{L}}$  et de leur moment cinétique de spin  $\vec{S} = \hbar \vec{\mathfrak{S}}$ , avec  $h$  constante de Planck et  $\hbar = h/2\pi$ , avec  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ . Suite à l'anomalie de spin (facteur 2), le moment magnétique s'écrit alors:  $\vec{\mathfrak{M}} = -\left(\frac{+e}{2m}\right)(\vec{L} + 2\vec{S})$  et n'est plus colinéaire au moment cinétique  $\vec{J}$ . Or, c'est le vecteur  $\vec{J}$  qui est la constante du mouvement. On montre (voir cours de mécanique quantique), que le moment magnétique apparent (composante du moment parallèle à  $\vec{J} = \hbar \vec{\mathfrak{J}}$ ) de l'atome est donné par:

$$\vec{\mathfrak{M}} = -g \left(\frac{+e}{2m}\right) \hbar \vec{\mathfrak{J}} = -g\mu_B \vec{\mathfrak{J}}$$

où  $-e$  et  $m$  sont respectivement, la charge et la masse de l'électron et  $g$  le facteur de Landé, coefficient sans dimension voisin de l'unité défini par

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

ou  $J, L$  et  $S$  sont les nombres quantiques associés (en unité  $\hbar$ ) au moment cinétique total, orbital et de spin respectivement. Il convient donc de remplacer le coefficient  $|\gamma|$  par  $+ge/2m$  dans les formules 5.3 et 5.4. La valeur du coefficient de Landé, pour les composés métalliques de Fe, Ni et Co, vaut 2.10, 2.18 et 2.21 respectivement.

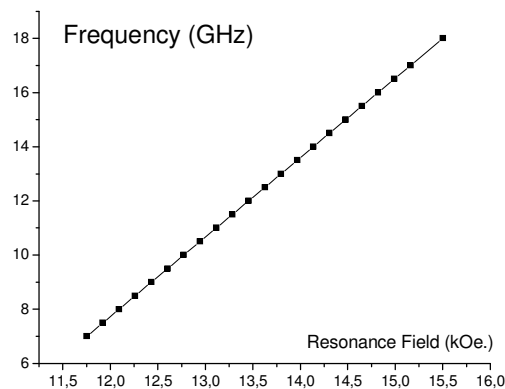


Figure 5 D'après un article de J. BenYoussef et al. publié dans JMMM (1999). La linéarité de la variation de la fréquence de résonance avec le champ appliqué permet de calculer le facteur de Landé  $g=2.07$  (échantillon de FerPd) ainsi que l'anisotropie magnétique du matériau.

A titre d'exemple, le graphique suivant (fig.5) reporte la variation de la fréquence de résonance ferromagnétique pour différentes valeurs du champ statique appliqué  $B$  pour une couche mince de Fer-Palladium. En règle générale, la résonance ferromagnétique permet d'avoir accès à la connaissance: de la susceptibilité magnétique du matériau ( $\chi'$  et  $\chi''$ ), du coefficient d'amortissement  $\alpha$ , de son facteur de Landé, de son aimantation via le terme démagnétisant ainsi que de l'anisotropie magnétique.

## 5.6 Résonance magnétique nucléaire (RMN , NMR)

quelques caractéristiques succinctes à la base des expériences de RMN.

La RMN a été mise en évidence de façon quasi-simultanée mais indépendamment par Bloch, Hansen et Packard d'une part, Purcell, Torrey et Pound d'autre part (1946). Pour ces travaux, Bloch et Purcell reçurent le prix Nobel en 1952. Cette technique est utilisée en physique pour l'étude des matériaux, en chimie où elle est

devenue un outil d'analyse et d'étude des structures de macromolécules enfin en biologie pour la détermination de la structure des protéines et l'exploration *in vivo* du métabolisme. La RMN offre ainsi à la médecine un moyen d'exploration non traumatique de routine par l'imagerie.

### 5.6.1 Les bases de la résonance (une touche quantique ! )

La RMN a son origine dans les propriétés magnétiques des noyaux. Certains noyaux ont un moment angulaire et donc un moment magnétique. C'est le cas du proton:  $^1H$ , et de bon nombre de noyaux connus  $^{13}C$ ,  $^{19}F$ ,  $^{23}Na$  etc...qui possède un spin nucléaire I non nul. En présence d'un champ  $\vec{B}$  l'énergie magnétique d'interaction W s'écrit:

$$W = -\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B}$$

Nous nous limiterons aux noyaux ci-dessus cités qui ont la propriété des noyaux de spin 1/2. Cela veut dire que le moment magnétique, en projection selon la direction du champ, possède un module unique:  $\|\vec{\mathfrak{M}}\| = (\frac{1}{2})\gamma\hbar$  mais ne peut prendre que deux orientations: parallèlement ou anti-parallèlement à B. [ **Attention ici  $\gamma$  est une quantité positive** ].

Il y a donc deux niveaux d'énergie  $W_{+1/2}$  et  $W_{-1/2}$  la séparation est donnée par  $\Delta W$  :

$$\Delta W = \gamma\hbar B$$

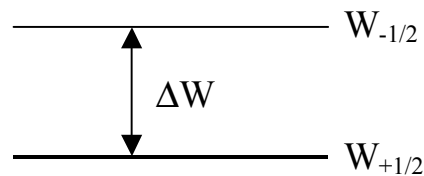


Figure 6 Niveaux d'énergie

### 5.6.2 Assemblée de noyaux dans un champ magnétique

Considérons une collection d'un grand nombre N de tels noyaux. A l'équilibre thermique, les états de spin sont distribués sur les deux niveaux d'énergie dans des proportions données par la statistique de Boltzmann. Pour le niveau de base constitué par les  $N_{+1/2}$  (noté simplement  $N_+$  par la suite) noyaux de spin  $S = +1/2$  ( vision classique: moment magnétique parallèle au champ) et dont l'énergie correspondante est égale à  $W_{+1/2} = -\frac{1}{2}\gamma\hbar B$ , ce nombre sera proportionnel à  $\exp(-\frac{W}{kT})$  soit

$$N_+ = A. \exp(-\frac{W_+}{kT}) = A. \exp(+\frac{\gamma\hbar B}{2kT})$$

où  $A$  est une constante. Pour le niveau supérieur en énergie on obtient (notation évidente)

$$N_- = A. \exp\left(-\frac{\gamma\hbar B}{2kT}\right)$$

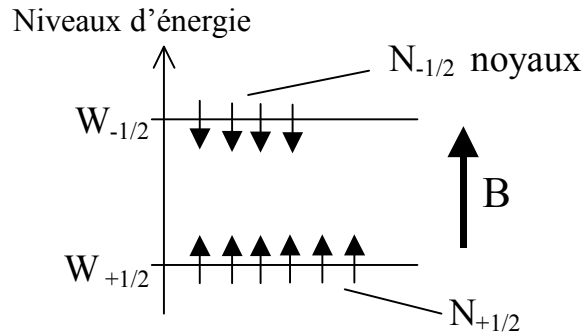


Figure 7 Population des deux niveaux d'énergie en présence d'un champ appliqué B.

La constante s'obtient en normant la somme:  $N_+ + N_- = N$  ce qui permet d'écrire le nombre  $N_-$  par exemple:

$$N_- = \frac{N \exp\left(-\frac{\gamma\hbar B}{2kT}\right)}{\exp\left(-\frac{\gamma\hbar B}{2kT}\right) + \exp\left(+\frac{\gamma\hbar B}{2kT}\right)} \quad (5.5)$$

On remarquera qu'aux températures usuelles et pour un champ appliqué de l'ordre du Tesla l'écart en énergie entre les deux niveaux est très faible comparée à la contribution thermique:  $\Delta W \ll kT$ . De ce fait les deux niveaux d'énergie sont quasiment également peuplés. L'excédent de population dans le niveau de basse énergie est extrêmement faible.

On peut aussi calculer l'aimantation résultante (valeur de la projection selon le champ B) pour cette collection de  $N$  noyaux comme:

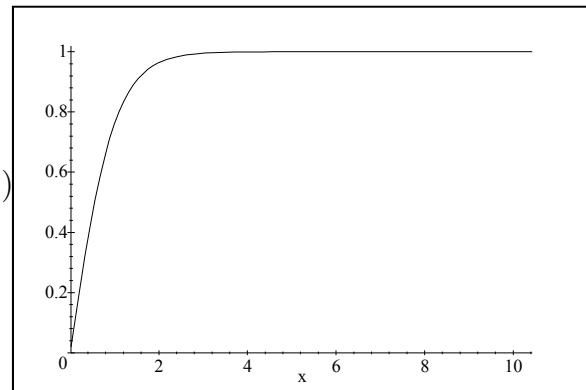
$$M = N_+ \left(\frac{1}{2}\right)\gamma\hbar + N_- \left(-\frac{1}{2}\right)\gamma\hbar = \frac{1}{2}\gamma\hbar(N_+ - N_-)$$

Ceci peut s'écrire à l'aide de la relation 5.5 comme

$$M = N \cdot \frac{1}{2}\gamma\hbar \cdot \tanh\left(\frac{\gamma\hbar B}{2kT}\right) \quad (5.6)$$

Le tracé graphique reproduit la variation de  $M/N \cdot \frac{1}{2}\gamma\hbar$  portée en ordonnée en fonction de  $x = \frac{\gamma\hbar B}{2kT}$  situé en abscisse.

$$(\exp x - \exp(-x)) / (\exp x + \exp(-x))$$



Notons que l'aimantation  $M$  ne varie pas de façon continue mais par sauts de valeur  $\gamma\hbar$  correspondant aux renversements successifs des  $N_-$  particules. L'étudiant comparera avec intérêt la forme  $M = \mathfrak{B}(a_1 B)$  avec celle obtenue pour l'évolution de la polarisation  $P$  en fonction du champ électrique appliqué pour une collection de dipôles élémentaires (polarisation par rotation)  $P = \mathfrak{L}(a_2 E)$  ( avec  $\mathfrak{L}$ : fonction de Langevin). Ainsi peut-on de la même façon définir une susceptibilité magnétique en champ  $B$  faible correspondant à la partie linéaire de la courbe:  $M = \chi H$  et ( $B = \mu_o H$ ) :

$$\chi = \mu_o \frac{N (\gamma\hbar)^2}{4k} \frac{1}{T}$$

On retrouve ainsi une dépendance en  $1/T$  de la susceptibilité (loi de Curie).

### 5.6.3 La technique RMN

L'expérience RMN vise à provoquer des transitions entre niveaux d'énergie. La technique utilisée consiste à appliquer un faible champ  $b$  (e.g. champ tournant) orthogonal à  $B$  à une fréquence proche de la transition définie (analogie flux de photons) par

$$\Delta W = \gamma\hbar B = \hbar\omega_o$$

soit encore

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{\gamma B}{2\pi}$$

(le sens de rotation importe).

On utilise généralement des impulsions du champ  $b$  de brève durée avec pour but de modifier la valeur de l'aimantation à l'équilibre thermique  $M$  (éq.5.6) parallèle à  $B$  que nous appellerons composante longitudinale ou  $M_{//}$ , tandis que la composante orthogonale (celle appartenant au plan du champ tournant) sera notée composante transverse  $M_{\perp}$ . Une fois le champ tournant coupé, le retour à l'équilibre de la composante longitudinale est décrit par une loi du type:

$$M_z(t) - M = [M_z(0) - M] \cdot \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)$$

où  $t=0$  correspond à l'instant de coupure du champ  $b$ ,  $T_1$  est la constante de temps de relaxation "longitudinale".

Un second signal peut aussi être observé, il s'agit du signal de précession libre. Dès la fin du signal radiofréquence, en reprenant la description classique, la précession de l'aimantation autour du champ constant  $B$  continue. La rotation de ce moment magnétique induit en effet une force électromotrice (fem) à la fréquence  $f_o$ . Toutefois, ce signal va s'amortir sur une durée caractéristique notée  $T_2$  (constante de temps de relaxation transversale) correspondant à l'alignement progressive du vecteur aimantation le long de l'axe  $OZ$  portant le champ statique  $B$ . Ce processus de relaxation va induire une fem:  $e$  mesurable de la forme

$$e \propto M \exp i(2\pi f_o t + \varphi) e^{-\frac{t}{T_2}}$$

En fait, la fréquence de résonance (fréquence de Larmor) varie spatialement selon la nature locale de l'échantillon (voire suite du cours avec la description des milieux diamagnétique et paramagnétique). De plus, pour une espèce chimique donnée la fréquence varie légèrement avec l'environnement électronique (déplacement chimique).

Ce sont ces éléments ( $f_o$ ,  $T_1, T_2, \dots$ ) qui sont à la base des méthodes de RMN.

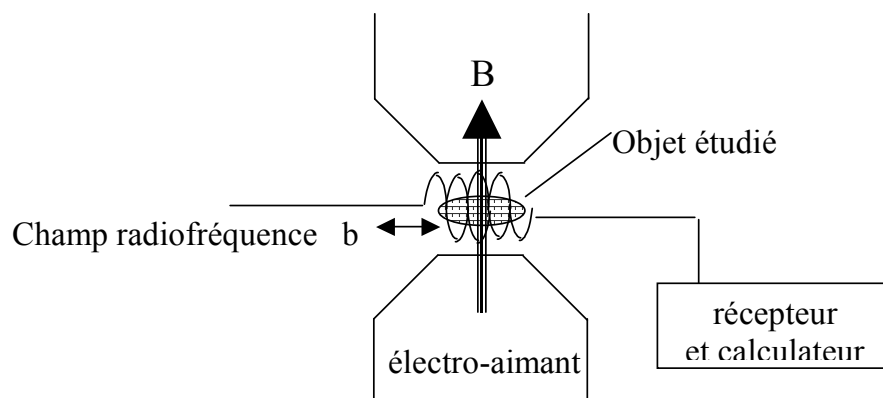


Figure 8 Schéma d'un spectromètre RMN

La figure 8 reproduit le schéma d'un spectromètre RMN. En résumé, les étapes successives suivantes sont effectuées:

- application d'un fort champ statique  $B$
- établissement de l'aimantation  $M$  correspondant à l'équilibre thermique
- application d'un pulse de champ radiofréquence  $b$  qui perturbe l'aimantation
- arrêt du champ  $b$  et analyse des signaux électroniques correspondant à la relaxation de l'aimantation vers sa valeur d'équilibre  $M$ .