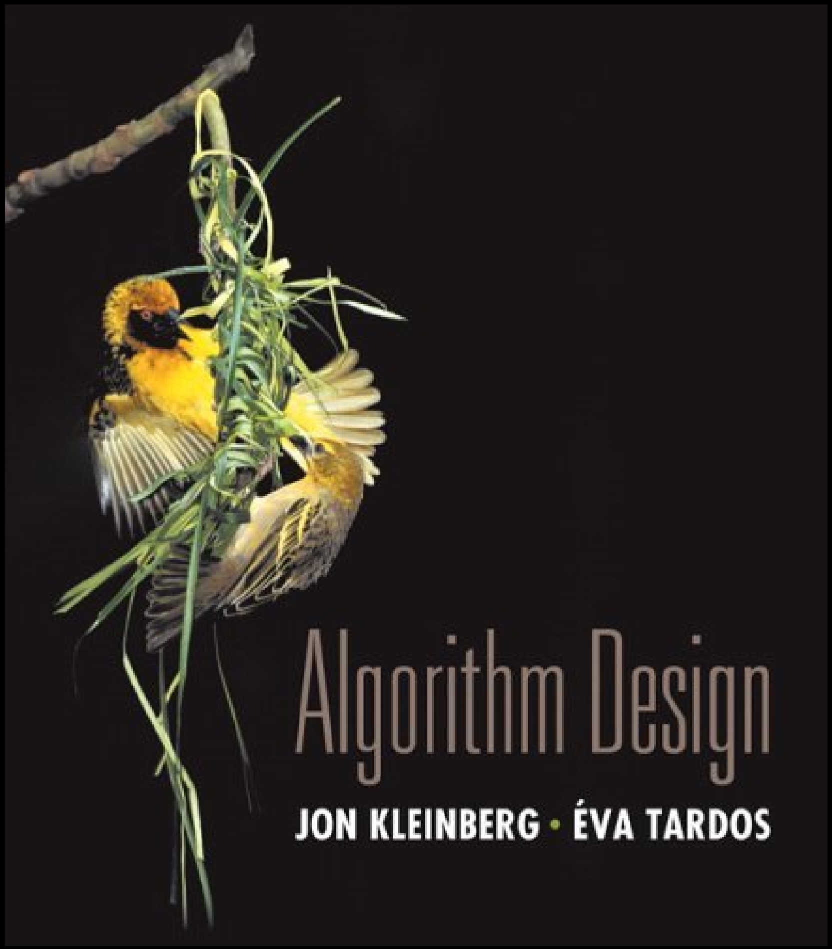


Chapitre 1

Introduction: Quelques problèmes Représentatifs

Premier Problème : Mariages stables

Stable Matching

(et variantes)

Affectation d'étudiants en médecine à des hôpitaux

But. Etant donnés des préférences (classement des hôpitaux) exprimées par les étudiants, mettre au point un processus d'affectation self-reinforcing.

Couple instable (Unstable pair) : le couple (étudiant x , hôpital y) non apparié est instable si :
- x préfère y à son hôpital d'affectation.
- y préfère x à un des étudiants qui lui sont affectés.

Affectation stable. Affectation sans couple instable.
- Condition naturelle et souhaitable.
- Elle prévient la possibilité d'arrangements étudiant/hôpital faits sur la base d'intérêts "privés".

Mariage stable (Stable Matching Problem)

But. Etant donnés n hommes et n femmes, trouver des mariages "qui conviennent".

- Chaque participant classe les membres du sexe opposé (par ordre de préférence décroissante).

1er choix ↓ … Dernier choix ↓

	1er	2e	3e
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Préférences masculines

1er choix ↓ … Dernier choix ↓

	1er	2e	3e
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Préférences féminines

Stable Matching Problem

Perfect matching: mariages monogames.

- Chaque homme marié à une et une seule femme.
- Chaque femme mariée à un et un seul homme.

Stabilité : aucun couple de participants n'est incité à bouleverser l'affectation par une action concertée.

- Dans l'attribution (matching) M, un couple non marié m-w est instable si l'homme m et la femme w se préfèrent à leur partenaires courants.
- Chaque membre d'un couple instable m-w peut améliorer son sort (en bouleversant l'affectation courante).

Stable matching: perfect matching sans couple instable.

Stable matching problem. Etant données les listes de préférences de n hommes et n femmes, trouver un stable matching s'il en existe.

Stable Matching Problem

Q. Le matching X-C, Y-B, Z-A est-il stable ?

	1er	2e	3e
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

1er choix → 1er ; Dernier choix → 3e

Préférences masculines

	1er	2e	3e
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

1er choix → 1er ; Dernier choix → 3e

Préférences féminines

Stable Matching Problem

Q. Le matching X-C, Y-B, Z-A est-il stable ?
R. Non. Le couple Bertha - Xavier est instable.

1er choix ↓ … Dernier choix ↓

	1er	2e	3e
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Préférences masculines

1er choix ↓ … Dernier choix ↓

	1er	2e	3e
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Préférences féminines

Stable Matching Problem

Q. Le matching X-A, Y-B, Z-C est-il stable ?
A. Oui.

	1er choix		Dernier choix
	1er	2e	3e
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Préférences masculines

	1er choix		Denie choix
	1er	2e	3e
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Préférences féminines

Problème des chambrées (Stable Roommate Problem)

Q. Existe-t-il toujours un matching stable ?
R. La réponse n'est pas évidente *a priori*.

Stable roommate problem.

- 2n personnes ; chacun classe les autres de 1 à 2n-1.
- Constituer des chambrées de 2 personnes sans chambrée instable.

	1er	*2e*	*3e*
Adam	B	C	D
Bob	C	A	D
Chris	A	B	D
Doofus	A	B	C

A-B, C-D $\Rightarrow$ B-C instable
A-C, B-D $\Rightarrow$ A-B instable
A-D, B-C $\Rightarrow$ A-C instable

Conclusion. Il n'existe pas toujours un matching stable pour le stable roommate problem.

Algorithme de Gale-Shapley (Propose-And-Reject Algorithm)

Proposer-et-rejeter. [Gale-Shapley 1962] Méthode intuitive qui garantit l'obtention d'un matching stable.

```
Initialisation : tout le monde est libre.
Tant que (un homme est libre et n'a pas demandé toutes les femmes)
{
    Choisir un tel homme m
    w := 1re femme sur le liste de m que m n'a pas encore demandée
    si (w est libre)
        alors apparier m et w
    sinon si (w préfère m à son partenaire courant m')
            alors apparier m et w, et libérer m'
         sinon
            w rejette m
}
```

Preuve de correction: Terminaison

Remarque 1. Les hommes font leurs demandes aux femmes par ordre de préférence décroissante.

Remarque 2. Une fois qu'une femme a un partenaire, elle n'est jamais libérée, elle ne peut être que "réaffectée" à un homme qu'elle préfère.

Prop. L'algorithme se termine avant n^2 itérations de la boucle tant que.

Preuve. À chaque passage dans la boucle, un homme fait sa demande à une nouvelle femme ; il y a seulement n^2 "demandes" possibles. ▪

	1er	2e	3e	4e	5e
Victor	A	B	C	D	E
Wyatt	B	C	D	A	E
Xavier	C	D	A	B	E
Yancey	D	A	B	C	E
Zeus	A	B	C	D	E

	1er	2e	3e	4e	5e
Amy	W	X	Y	Z	V
Bertha	X	Y	Z	V	W
Clare	Y	Z	V	W	X
Diane	Z	V	W	X	Y
Erika	V	W	X	Y	Z

$n(n-1) + 1$ demandes sont nécessaires

Preuve de correction : Perfection

Prop. Toutes les femmes et tous les hommes sont mariés.

Preuve. (par l'absurde)

- Supposons, par exemple, que Zeus soit libre à la fin de l'exécution de l'algorithme.
- Alors il y a une femme, par exemple Amy, qui est libre à la fin de l'exécution de l'algorithme.
- La remarque 2 implique qu'Amy n'a jamais été demandée.
- Pourtant Zeus a été réjété par toutes les femmes ; il a donc fait sa demande à chaque femme. ▪

Preuve de correction : Stabilité

Prop. Il n'y a pas de couple instable.

Preuve. (par l'absurde)

- Supposons que A-Z soit un couple instable: A préfère Z (resp. Z préfère A) à son partenaire dans le matching S* obtenu par Gale-Shapley.

les hommes font leurs demandes par ordre de préfèrence décroissante

S*

Amy-Yancey
Bertha-Zeus
. . .

- 1^{er} Cas : Z n'a jamais fait de demande à A.
  - ⇒ Z préfère son partenaire GS à A (remarque 1).
  - ⇒ A-Z est stable.

les femmes ne changent de partenaire que pour un homme qu'elles préfèrent

- 2^{nd} Cas : Z a fait une demande à A.
  - ⇒ A a rejeté Z (lors de sa demande ou plus tard)
  - ⇒ A préfère son partenaire GS à Z (remarque 2).
  - ⇒ A-Z est stable.

- Dans les deux cas A-Z est stable, d'où la contradiction. ▪

Résumé

Stable matching problem. Etant donnés n hommes et n femmes, et leurs préfèrences, trouver un matching stable, s'il en existe.

Algorithme de Gale-Shapley. Garantit l'obtention d'un matching stable pour toute instance du problème.

Q. Comment implémenter efficacement l'algorithme GS ?

Q. S'il existe plusieurs matchings stables, lequel GS construit-il ?

Implémentation efficace

Implémentation efficace. On décrit une implémentation de coût en temps $O(n^2)$.

Représentation des hommes et des femmes.
- Les hommes sont représentés par 1, …, n.
- Les femmes sont représentées par 1', …, n'.

Matchings (engagements).
- On "maintient" une liste d'hommes libres, par ex. une file (queue).
- On utilise deux tableaux `wife[m]`, et `husband[w]`.
  - La clé vaut `0` si elle correspond à un participant libre
  - Si m est affecté à w alors `wife[m]=w` et `husband[w]=m`

Les hommes font leurs demandes.
- Pour chaque homme, une liste de femmes, ordonnée par préférence.
- Un tableau `count[m]` où les clés comptent les demandes faites par `m`.

Implementation efficace

Les femmes acceptent/rejettent.

- **w** préfère-t-elle **m** à **m'**?
- Pour chaque femme, on crée l'inverse de sa liste de préférences.
- Temps d'accès constant après une phase de pré-processing en O(n).

Amy	1er	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e
Pref	8	3	7	1	4	5	6	2

Amy	1	2	3	4	5	6	7	8
Inverse	4e	8e	2e	5e	6e	7e	3e	1e

```
pour i := 1 à n
   inverse[pref[i]] := i
```

Amy préfère 3 à 6
car `inverse[3]` < `inverse[6]`

2 7

Comprendre la solution

Q. Pour une instance donnée, il peut y avoir plusieurs matchings stables. Toutes les exécutions de GS construisent-elles le même matching stable ? Si oui, lequel ?

Une instance avec deux matchings stables.

- A-X, B-Y, C-Z.
- A-Y, B-X, C-Z.

	1er	2e	3e
Xavier	A	B	C
Yancey	B	A	C
Zeus	A	B	C

	1er	2e	3e
Amy	Y	X	Z
Bertha	X	Y	Z
Clare	X	Y	Z

Comprendre la solution

Q. Pour une instance donnée, il peut y avoir plusieurs matchings stables. Toutes les exécutions de GS construisent-elles le même matching stable ? Si oui, lequel ?

Déf. L'homme m est un partenaire valide de la femme w s'il existe un matching stable qui les marie.

Attribution optimale pour les hommes (Man-optimal assignment). Chaque homme est marié à la mieux classée (selon ses préférences) de ses partenaires valides.

Prop. Toutes les exécutions de GS construisent une attribution optimale pour les hommes, qui est un matching stable !

- Il n'y a pas de raison de penser *a priori* qu'une attribution optimale pour les hommes est un matching parfait, ni de raison de penser qu'elle est stable.

Optimalité pour les hommes

Prop. Tout matching S^* obtenu par GS est optimal pour les hommes.

Preuve. (par l'absurde)

- Supposons qu'il y ait un homme marié dans S^* à une autre femme que sa partenaire valide préférée. Les hommes font leurs demandes dans l'ordre de leur préférence décroissante $\Rightarrow$ Il y a un homme qui a été rejeté par une partenaire valide.
- Soit Y le premier de ces hommes, et soit A la première partenaire valide à le rejeter.
- Soit S un matching stable dans lequel A et Y sont mariés.
- Quand A rejette Y, elle s'engage (ou réaffirme un engagement antérieur) en faveur d'un homme, Z, qu'elle préfère à Y.
- Soit B le partenaire de Z dans S.
- Au moment où Y est rejeté par A, Z n'a été rejeté par aucune partenaire valide. Donc, Z préfère A à B.
- Mais A préfère Z à Y.
- Donc A-Z forme un couple instable dans S. ▪

Puisque le rejet de Y par A est le 1er rejet par une partenaire valide

S
Amy-Yancey
Bertha-Zeus
. . .

Résumé sur le Matching stable

Stable matching problem. Etant données les préférences de n hommes et n femmes, construire un matching stable .

Pas de couple homme-femme se préférant mutuellement à leur partenaire attribué

Algorithme de Gale-Shapley. Construit un matching stable avec un coût en temps $O(n^2)$.

Optimalité pour les hommes. Dans la version de GS où ce sont les hommes qui font les demandes, chaque homme est marié à sa partenaire valide préférée.

w est une partenaire valide de m s'il existe un matching stable dans lesquels w et m sont mariés

Q. L'optimalité pour les hommes a-t-elle un coût pour les femmes ?

Woman Pessimality

Attribution Woman-pessimal. Chaque femme est mariée au plus mal classé de ses partenaires valides.

Prop. Pour toute instante, GS construit un matching stable S* <u>woman-pessimal</u>.

Preuve.

- Supposons que A-Z soient mariés dans S*, et que Z ne soit pas le partenaire valide le plus mal classé par A.
- Il existe un matching stable S dans lequel A est mar ,
  Y, auquel elle préfère Z.
- Soit B le partenaire de Z dans S.
- Z préfère A à B.
- Donc A-Z forme un couple instable dans S, d'où la contradiction. ▪

S
Amy-Yancey
Bertha-Zeus
. . .

Extensions: Affectation d'étudiants en médecine aux hôpitaux

Ex: Hommes ≈ hospitals, femmes ≈ étudiants en médecine.

Variante 1. Certains participants en déclarent d'autres inacceptables.

le "resident" A refuse de travailler à Cleveland

Variante 2. Pas le même nombre d'hommes et de femmes.

Variante 3. Polygamie limitée.

l'hôpital X veut recruter 3 "residents"

Déf. Le matching S est instable s'il existe un hôpital h et un étudiant r tels que :

- h et r sont acceptables l'un pour l'autre ; ET
- Ou r est sans affectation, ou r préfère h à son hôpital d'affectation ; ET
- Ou h a encore des places disponibles, ou h préfère r à au moins un des étudiants qui lui ont été affectés.

Application : Attribution de "Residents" aux hôpitaux

NRMP. (National Resident Matching Program)

- Utilisé pour la 1re fois juste après la 2nde guerre mondiale .
- 23.000+ "residents".

Avant l'usage des ordinateurs

Le dilemme des hôpitaux ruraux.

- Certains hôpitaux (surtout dans les zones rurales) avaient mauvaise réputation et étaient déclarées inacceptable.
- Ces hôpitaux recevaient moins de "residents" que leur capacité dans le matching construit par NRMP
- Comment trouver des matchings stables qui soient profitables aux "hôpitaux ruraux" ?

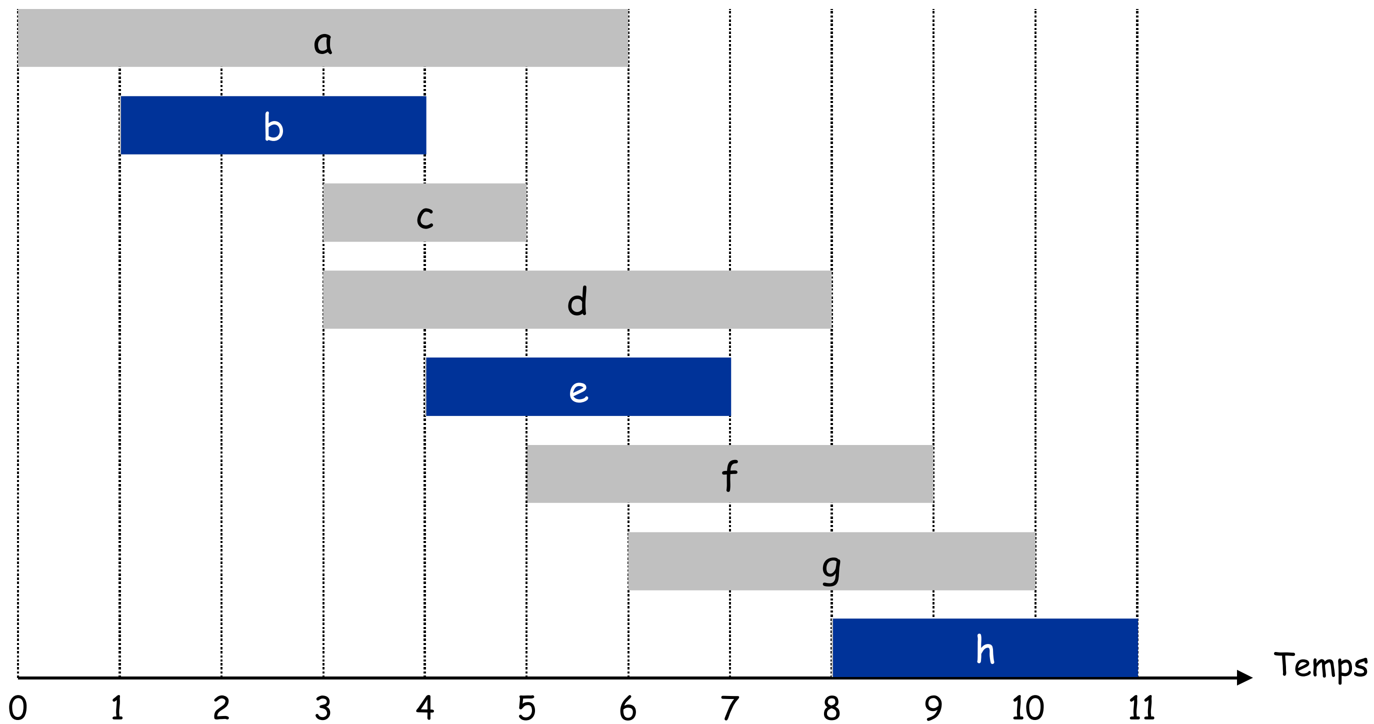
Rural Hospital Theorem. Les hôpitaux ruraux recoivent toujours le même nombre de résidents dans chaque matching stable !

Cinq problèmes représentatifs

Interval Scheduling

Input. Un ensemble de tâches avec les heures de début et de fin.
But. Trouver un sous-ensemble de cardinalité maximale de tâches compatibles.

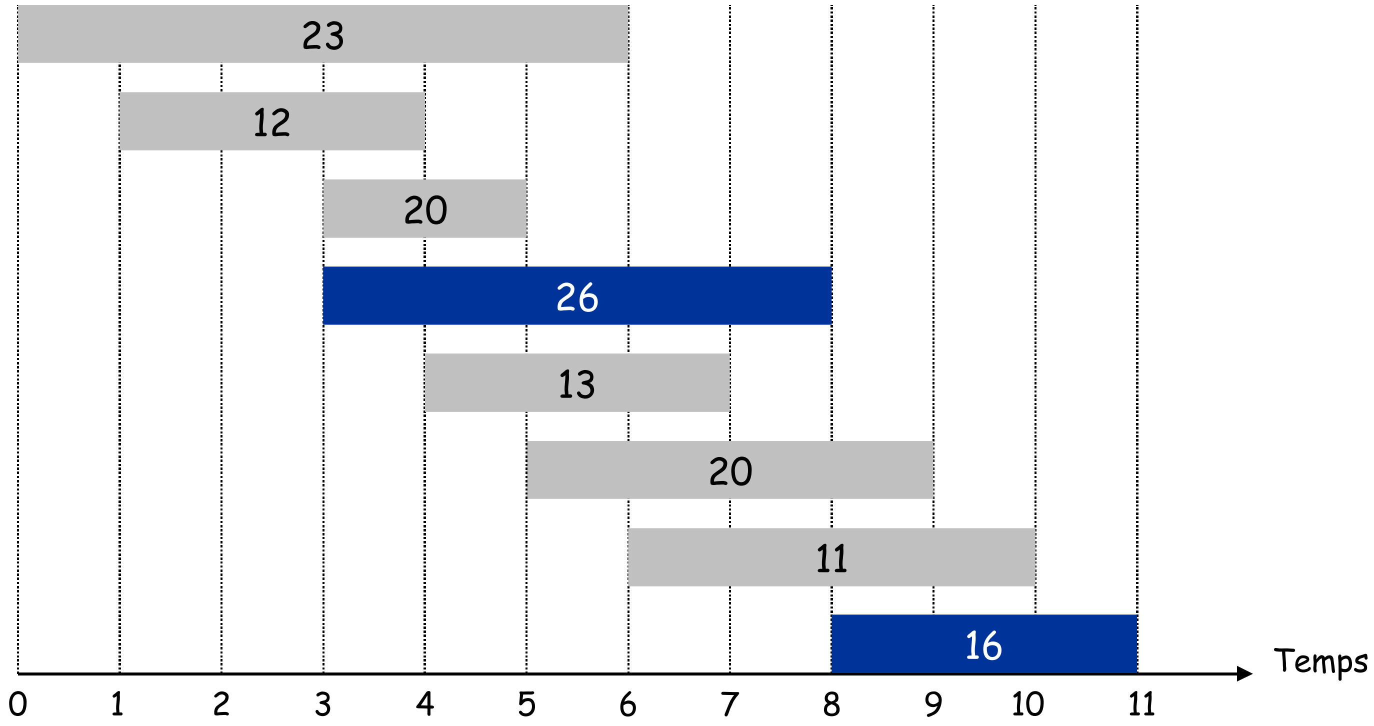
Les tâches ne se chevauchent pas



Interval Scheduling pondéré

Input. Un ensemble de tâches, avec les heures de début et de fin, et des poids.

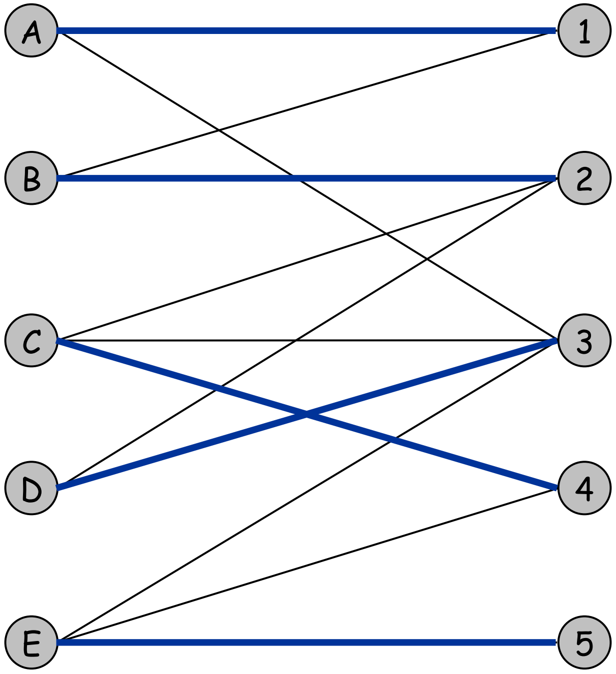
But. Trouver un sous-ensemble de poids maximal de tâches compatibles



Matching biparti

Input. Graphe biparti.

But. Trouver un matching de cardinalité maximale.

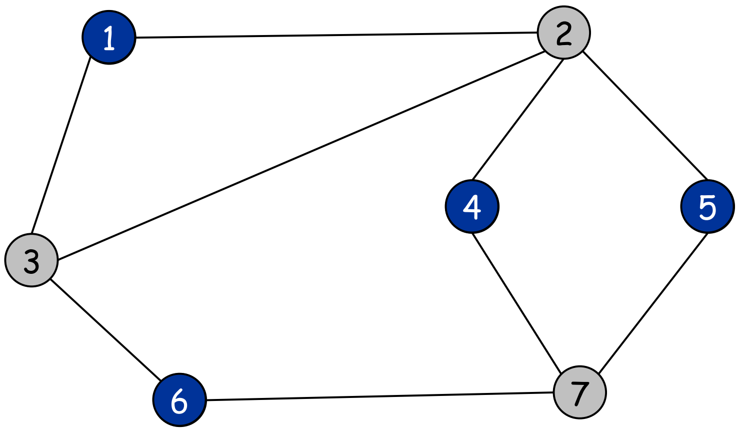


Ensemble indépendant (de sommets)

Input. Graphe.

But. Trouver un ensemble indépendant de cardinalité maximale.

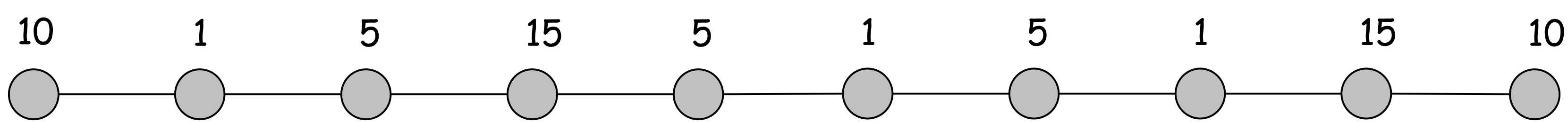
Sous-ensemble de sommets non reliés



Competitive Facility Location

Input. Graphe avec des sommets pondérés.
Jeu. Deux joueurs choisissent alternativement un noeud. Un joueur n'est pas autorisé à choisir un noeud dont un voisin a déjà été choisi.

But. Trouver un sous-ensemble de noeuds de poids maximal.



Le 2e joueur peut garantir 20, mais pas 25.

Cinq problèmes représentatifs

Variations sur un thème : ensemble indépendant.

Interval scheduling : algorithme glouton de coût n log n.
Interval scheduling pondéré : la programmation dynamique donne un algorithme de coût n log n.
Matching biparti : algorithme de flot maximal de coût n^k.
Ensemble indépendant : NP-complet.
Competitive facility location: PSPACE-complete.

Diapos supplémentaires

Comprendre la Solution

Prop. Le matching stable optimal pour les hommes est faiblement optimal au sens de Pareto.

Il n'existe pas de matching parfait (stable ou instable) dans lequel chaque homme fait strictement mieux

Preuve.

- Soit A la dernière femme dans l'exécution de GS à recevoir une demande.
- Aucun homme n'est rejeté par A puisque l'algorithme se termine quand la dernière femme reçoit sa première demande.
- Aucun homme marié à A ne sera mieux traité que dans un matching stable optimal pour les hommes. ▪

Machiavellisme et Gale-Shapley

Q. Y a-t-il une incitation à ne pas donner ses préférences réelles ?

- Supposons qu'on sache qu'un algo proposer-et-rejeter sera utilisé.
- Supposons que vous connaissiez les préférences de tous les autres participants.

Fait. Non, pour tout homme ; oui, pour certaines femmes. Aucun mécanisme ne peut garantir à la fois un matching stable et l'impossibilité de tricher.

	1er	2e	3e
Xavier	A	B	C
Yancey	B	A	C
Zeus	A	B	C

Préférences masculines

	1er	2e	3e
Amy	Y	X	Z
Bertha	X	Y	Z
Clare	X	Y	Z

Préférences féminines réelles

	1er	2e	3e
Amy	Y	Z	X
Bertha	X	Y	Z
Clare	X	Y	Z

Mensonge d'Amy