Analyse : Calcul différentiel dans un Banach

Table des matières

Dans ce chapitre on prend E, F espace de Banach et Ω (ou U) un ouvert de E, $u_0 \in \Omega$ (Ω est alors un voisinage de u_0) et $J : \Omega \to F$.

Première partie
Définition de la différentiabilité

Soit une fonction f définie d'un ouvert U d'un e.v.n E vers un *e.v.n* F.

L'objectif est de *linéariser* f *au voisinage de* $a \in \Omega$, c'est à dire d'approcher au voisinage de a la différence $f(a+h) - f(a)$ par une expression linéaire continue en la variable h.

Définition 1 *On dit qu'une fonction $f : U \to F$ est différentiable en un point $a \in U$ s'il existe une application linéaire continue $L : E \to F$ telle que :*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \emptyset(\|h\|)$$

On dit alors que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U

Remarque 1 *Comme une application linéaire est nécéssairement continue lorsque l'espace de départ E est de dimension finie, il sera inutile dans ce cas de spécifier la continuité de L.*

Proposition 1 (Unicité de la différentielle en a) *Si une fonction $f : U \to F$ est différentiable en un point $a \in U$, alors il existe une et une seule application linéaire continue $L : E \to F$ telle que :*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \emptyset(\|h\|)$$

Démonstration. L'existence de L est assurée par l'hypothèse de différentiabilitée. Supposon qu'il existe deux appilcation linéaires continues L_1 et L_2 qui vérifient l'égalité voulue. Alors par différence on a :

$$(L_1 - L_2)(h) = \circ(\|h\|)$$

ce qui signifie que :

$$\forall \epsilon > 0, \alpha > 0, \forall h \in E \quad \textit{on ait} : \|h\| \leq \alpha \Rightarrow \|(L_1 - L_2)(h)\| \leq \epsilon \|h\|$$

quitte a poser $x = \rho h$ avec $\|h\| \leq \alpha$ on obtient alors :

$$\|(L_1 - L_2)(x)\| \leq \epsilon \|x\|$$

d'où par définition de la norme subordonnée d'une application linéaire continue :

$$\forall \epsilon > 0, |||L_1 - L_2||| \leq \epsilon$$

donc la norme subordonnée de la différence $L_1 - L_2$ vaut 0 ce qui établit l'unicité de L

Définition 2 *Si $f : U \to F$ est différentiable en un point $a \in U$, on appelle application linéaire tangente ou différentielle de f en a l'unique application linéaire continue $df_a \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telle que :*

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \circ(\|h\|)$$

Remarque 2 *Lorsque $E = \mathbb{R}$, on a par linéarité pour tout réel h : $df_a(h) = hdf_a(1)$ et on en déduit :*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{hdf_a(1) + \circ(h)}{h} = df_a(1)$$

Dans ce cas on a : $df_a(h) = hdf_a(1) = hf'(a)$ et on retrouve la relation classique suivante :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(h) + \circ(h)$$

Proposition 2 (Une application différentiable est continue) *Si $f : U \to F$ est différentiable en un point $a \in U$, alors elle est continue en a (mais la réciproque est fausse).*

Démonstration. On a par définition de la différentiabilité en a :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \circ(\|h\|)$$

Comme l'application linéaire df_a est continue, il est clair que la limite de $df_a(h)$ lorsque h tend vers 0_E est 0_F, ce qui implique la continuité de f en a :

$$\lim_{h \to 0_E} f(a+h) = f(a)$$

Exemple 1 (Une fonction continue mais non différentiable) *Considérons une norme $\|.\|$ sur un e.v réel E.*

On sait qu'elle est continue dur l'e.v.n $E, \|.\|$ car elle y est 1-lipschitzienne :

$$|\|a+h\| - \|a\|| \leq \|h\||$$

En revanche, $\|.\| n'est jamais différentiable à l'origine 0_E$. Supposons qu'elle le soit alors il existe $L : E \to \mathbb{R}$ linéaire continue telle que $\|h\| = L(h) + \o(\|h\|)$. L'égalité $\|th\| = \|-th\|$ donne alors pour tout réel t, avec h fixé :

$$L(th) + \o(\|th\|) = L(-th) + \o(\|th\|)$$

On en tire $2tL(h) = \o(\|th\|)$ d'où $L(h) = 0$ en divisant par t et en faisant tendre t vers 0. Comme h est arbitraire, on a $L = 0$ et la relation $\|h\| = \o(\|h\|)$. Contradiction.

Exemple 2 (Une application linéaire continue est différentiable) *Montrons qu'une application linéaire continue $L : E \to F$ est différentiable. On a par linéarité en tout point a de E :*

$$\forall a \in E, \forall h \in E, \quad L(a+h) = L(a) + L(h)$$

Il en résulte que la différentielle d'une application linéaire continue est elle même.

Exemple 3 (Une application bilinéaire continue est différentiable) *Comme d'habitude, un produit $E_1 \times E_2$ est normée par $\|(x_1, x_2)\| = max(\|x_1\|, \|x_2\|)$. Montrons qu'une application bilinéaire continue $B : E_1 \times E_2 \to F$ est différentiable.*

On a par bilinéarité en tout point $a = (a_1, a_2)$ de $E_1 \times E_2$:

$$B(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = B(a_1, a_2) + (B(h_1, a_2) + B(a_1, h_2)) + B(h_1, h_2)$$

L'application $h \to B(h_1, a_2) + B(a_1, h_2)$ est linéaire continue. Le dernier terme est en $\circ(\|h\|)$ puisque $\|B(h_1, h_2)\| \leq k \|h_1\| \|h_2\| \leq \|h_1\|^2$, il en résulte que $h \to B(h_1, a_2) + B(a_1, h_2)$ est la différentielle de B en a.

Exemple 4 (Différentielle de $\boldsymbol{\phi \quad : \quad f \in GL_c(E) \to f^{-1} \in GL_c(E)}$) *On montre maintenant que la différentielle de $\phi \quad : \quad f \in GL_c(E) \to f^{-1} \in GL_c(E)$ est l'application suivante :*

$$h \to -f^{-1} \circ h \circ f^{-1}$$

Etablissons d'abord que l'application $f \to f^{-1}$ est différentiable en $f = Id$. On sait que $Id + h$ est inversible si $|\|h\|| < 1$, et son inverse est la somme de la série :

$$(Id + h)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-h)^k = Id - h + \sum_{k=2}^{\infty} (-h)^k$$

Cette dernière somme est négligeable devant $|\|h\||$ car :

$$\left|\left\|\sum_{k=2}^{\infty} (-h)^k\right\|\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} |\|(-h)^k|\| = \sum_{k=2}^{\infty} |\|h^k|\| = \frac{|\|h\||^2}{1 - |\|h\||} = \circ(|\|h|\|)$$

Ainsi on a comme annoncé :$(Id + h)^{-1} = Id - h + \circ(|\|h|\|)$

Etablissons alors que l'application $\phi \quad : \quad f \in GL_c(E) \to f^{-1} \in GL_c(E)$ est différentiable en $f \in GL_c(E)$. A cet effet, on se ramène au cas précédent en écrivant $f + h = (Id + h \circ f^{-1}) \circ f$. On sait *que $Id + h \circ f^{-1}$ est inversible si $\left|\left\|h \circ f^{-1}\right\|\right| < 1$, ce qui est notemment réalisé si $|||h||| \leq \frac{1}{|||f^{-1}|||}$, et on a alors :*

$$(f+h)^{-1} = ((Id + h \circ f^{-1}) \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ (Id + h \circ f^{-1})^{-1}$$

On applique le résultat précédent à $(Id + h \circ f^{-1})^{-1}$, et on obtient :

$$(f+h)^{-1} = f^{-1} \circ (Id - h \circ f^{-1} + \circ(\left|\left\|h \circ f^{-1}\right\|\right|))$$

une expression négligeable devant $h \circ f^{-1}$ est à fortiori négligeable devant h ce qui donne le résultat suivant :

$$(f+h)^{-1} = f^{-1} - f^{-1} \circ h \circ f^{-1} + \circ(|||h|||)$$

Proposition 3 (Produit d'une fonction scalaire et d'une fonction différentiables) *Soient $\lambda : U \to \mathbb{R}$ et $f : U \to F$ différentiables en $a \in U$ (resp. sur U). Alors λf est différentiable en a (resp. sur U) et on a :*

$$d(\lambda f)_a = f(a) d\lambda_a + \lambda(a) df_a$$

Proposition 4 (Composée d'une application linéaire et d'une fonction différentiable) *Soient trois e.v.n. $E, F,$ et G et un ouvert U de E. Soit $f : U \to F$ différentiable en $a \in U$ (resp. sur U). Soit $L : F \to G$ linéaire continue. Alors $L \circ f$ est différentiable en a (resp. sur U) et sa différentielle en a est :*

$$d(L \circ f)_a = L \circ df_a$$

Proposition 5 (Application au cas où l'e.v.n F d'arrivé est de dimension finie) *Soient un ouvert U d'un espace de Banach E et un espace F de dimension finie. On suppose l'espace F rapporté à une base $B_F = (v_1, \ldots, v_n)$. Pour une fonction $f = f_1 v_1 + \ldots + f_n v_n : U \to F$,il y a équivalence entre :*

- *la fonction $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$ (resp. sur U)*
- *les composantes $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ sont différentiables en $a \in U$ (resp. sur U)*

Proposition 6 (Composition des fonctions différentiables) *Soient trois e.v.n. E, F, G et U un ouvert de E,V un ouvert de F. Soit une fonction $f : U \to F$ différentiable en $a \in U$ (resp. sur U). Soit une fonction $g : V \to G$ différentiable en $f(a)$ (resp. sur V). Si $f(U) \subset V$, alors $g \circ f$ est différentiable en a (resp. sur U) et on a :*

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

Application 1 (Différentielle de $1/\lambda$) *Soit $\lambda : U \to \mathbb{R}$ différentiable en a. Si λ ne s'annule pas et si λ est différentiable en a, alors $1/\lambda$ est différentiable en a et :*

$$\forall h \in E, d(\frac{1}{\lambda}_a) = -\frac{1}{\lambda^2(a)} d\lambda_a$$

En effet il suffit d'appliquer le résultat précédent avec les deux application f, g définie par $f : x \in U \to \lambda(x) \in \mathbb{R}$ et

$$g : x \in \mathbb{R}^* \to 1/x \in \mathbb{R}$$

Deuxième partie
Différentiabilité en dimension finie

1 Dérivées suivant un vecteur, dérivées partielles dans une base

Soient un point a de l'ouvert U, un vecteur non nul h de E, et une fonction $f : U \to F$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$, et comme f est définie sur U, donc sur $B(a, r)$,alors $t \in \mathbb{R} \to \phi(t) = f(a + th) \in F$ est définie $^{p}our\|th\| < r$,donc sur un voisinage de 0 contenant $] - r/\|h\|, r/\|h\|[$, ce qui légitime la définition suivante.

Définition 3 *Soient U un ouvert d'un e.v.n. E et un e.v.n. F. On dit qu'une fonction $f : U \to F$ a une dérivée en $a \in U$ suivant un vecteur $h \in E$ si la fonction de la variable réelle $t : \phi(t) = f(a + th) \in F$ est dérivable en 0. On appelle alors d"érivée de f en a suivant le vecteur h le vecteur $D_h f(a) = \phi'(0)$ tel que :*

$$D_h f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

Expression de la dérivée suivant un vecteur dans une base F (F de dimension finie)
Supposons l'espace vectoriel F de dimension finie n et rapporté à une base $(v_1, ..., v_n)$.
Dans ce cas, si $f = f_1 v_1 + ... + f_n v_n$, il y a équivalence entre :
- la fonction f admet une dérivée en anU suivant un vecteur h
- les fonctions $f_1, ..., f_n$ admettent une dérivée en $a \in U$ suivant un vecteur h et la dérivée de f en a suivant ce vecteur h est égale à :
$$D_h f(a) = D_h f_1(a) v_1 + ... + D_h f_n(a) v_n$$

En effet dans l'etude de la dérivabilité des fonctions vectorielles d'un iintervalle I dans F, on a montré qu'une telle fonction est dérivable si et seulement si ses composantes le sont et on a établit que les composantes de sa dérivée sont les dérivés des composantes. D'où le résultat par application en $t = 0$ à la fonction d'une variable réelle $t \mapsto f(a + th)$.

Proposition 7 (Une propriété des fonctions différentiables) *Soient un ouvert U d'un e.v.n. E et un e.v.n. F.*

Si une fonction $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$, alors elle admet une dérivée au point a suivant tout vecteur h, et celle-ci est égale à :

$$D_h f(a) = df_a(h)$$

On suppose désormais E de dimension finie p rapporté à une base $B_E = (e_1, ..., e_p)$. On introduit les dérivées partielles de f dans cette base par la définition suivante.

Définition 4 *Soient un ouvert U de E. On appelle $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle en $a \in U$ d'une fonction $f : U \to F$ la dérivée de f au point a suivant le vecteur e_j, sous réserve d'existence de celle-ci, et on la note :*

$$D_j f(a) \quad ou \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

Si $f : U \to F$ a une $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle en tout point de U, on peut alors considéré la fonction $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle $D_j f : U \to F$.

Proposition 8 (Expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles) *Soient un ouvert U d'un e.v.n. E de dimension p et un e.v.n. F de dimension n.*

Si $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$, elle a des dérivées partielles en a dans toutes base $B_E = (e_1, \ldots, e_p)$ de E, qui sont égales à $D_j f(a) = df_a e_j$ et on a :

$$\forall h \in E, \quad df_a(h) = h_1 D_1 f(a) + \ldots + h_p D_p f(a)$$

On a une autre formule avec légalité : $D_h f(a) = df_a(h)$

Démonstration. Si f est différentiable en $a \in U$, elle a des dérivées partielles suivant tout vecteur comme l'indique la proposition "une propriété des fonctions différentiables". On prend donc les vecteurs de la base de E et on obtient par linéarité de $df_a(h)$ avec $h = h_1 e_1 + ... + h_p e_p$:

$$df_a(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j D_j f(a)$$

Remarque 3
- *Une fonction peut avoir des dérivées partielles sans être différentiable, par exemple la fonction $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$*
- *Notation différentielle : Pour une application $f : U \to F$ différentiable en un point $a \in U$, on a établi que :*
$$\forall h \in E, \quad df_a(h) = h_1 D_1 f(a) + \ldots + h_p D_p f(a)$$
Si on désigne par $(dx_1, ..., dx_p)$ la base dual de $B_E = (e_1, ..., e_p)$ qui est constituée des applications associant au vecteur h ses composantes dans la base B_E alors :
$$\forall h \in E, \quad df_a(h) = D_1 f(a) dx_1(h) + \ldots + D_p f(a) dx_p(h)$$
on en déduit donc avec l'égalité pour tout les h de E :
$$\forall h \in E, \quad df_a = D_1 f(a) dx_1 + \ldots + D_p f(a) dx_p$$
Soit encore une autre notation :
$$df_a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) dx_p$$

2 Interprétation matricielle de la différentiabilité

On suppose les dimensions finies dans ce paragraphe E de dimension p et F de dimension n tous deux rapportés à leur bases respectives.

Définition 5 *Soit une fonction $f : U \to F$ différentiable en $x \in U$. On appelle matrice jacobienne (ou jacobienne) de f en x la matrice Jf_x de df_x relativement aux bases prises pour E et F. La $j^{\text{ème}}$ colonne de cette matrice est alors l'image par df_x du $j^{\text{ème}}$ vecteur de base e_j, et c'est donc la $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle $df_x(e_j) = D_j f(x)$ exprimée dans la base B_F de F.*

On a alors :

$$Jf_x = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & D_2 f_1(x) & \dots & D_p f_1(x) \\ D_1 f_2(x) & D_2 f_2(x) & \dots & D_p f_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(x) & D_2 f_n(x) & \dots & D_p f_n(x) \end{pmatrix}$$

3 Fonctions de classe C^1 sur un ouvert

Proposition 9 (Théorème fondamental) *Soient un ouvert U d'un espace E de dimension p et un espace F de dimension n. Si une fonction $f : U \to F$ admet des dérivées partielles continues sur l'ouvert U dans une base de E, alors elle est différentiable, et donc continue, sur U.*

Proposition 10 (Définition équivalente des fonctions de classe C^1) *Soient un ouvert U d'un espace E de dimension p et un espace F de dimension n. Pour une fonction $f : U \to F$, il y a équivalence entre :*
- *l'application $x \longmapsto D_h f(x)$ est continue sur U pour tout vecteur $h \in E$*
- *les dérivées partielles de f sont continues sur U dans une base (toute base) de E*

Une telle proposition justifie la définition suivante des fonctions de classe C^1 :

Définition 6 *Soient un ouvert U d'un espace E de dimension p et un espace F de dimension n. On dit qu'une fonction $f : U \to F$ est de classe C^1 sur l'ouvert U si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*
- *f admet des dérivées partielles continues sur U dans une base (toute base) de E*
- *f admet une dérivée continue sur U suivant tout vecteur h de E*

Et une telle fonction est nécessairement différentiable, donc continue, sur l'ouvert U.

De plus f est de classe C^1 sur $U \Leftrightarrow f$ est différentiable sur U et l'application $x \in U \longmapsto df_x \in \mathbb{L}_c(E, F)$ continue.

4 Opérations sur les fonctions de classe C^1

- **Cas d'une combinaison linéaire de fonctions**
  Soient un ouvert U d'un espace E de dimension p et un espace F de dimension n. Soient deux réels λ, μ et deux fonctions $f, g : U \to F$. Si f, g sont différentiables en $x \in U$, alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable en x et on a :

  $$\forall j = 1...p, \quad d(\lambda f + \mu g)_x(e_j) = \lambda df_x(e_j) + \mu dg_x(e_j)$$

  comme $dh_x(e_j) = D_j h(x)$ on a pour $j = 1...p$:

  $$D_j(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda D_j f(x) + \mu D_j g(x)$$

  Ainsi la continuité des dérivée partielles des fonctions f et g sur l'ouvert U implique celle des dérivées partielles de $\lambda f + \mu g$, et on en déduit le résultat suivant :

  Une combinaison linéaire de fonction de classe C^1 sur U est de classe C^1 sur U. L'ensemble $C^1(U, F)$ des fonctions C^1 de U dans F forme un espace vectoriel.

- **Un produit de fonctions réelles et vectorielle de classe C^1 sur U est de classe C^1 sur U**
- **Une composée d'une application linéaire (nécessairement continue dans ce cas) et d'une fonction $f : U \to F$ de classe C^1 sur U est de classe C^1 sur U**
- **Une composée de fonctions $f : U \to F$ et $g : V \to G$ de classe C^1 sur U et V est de classe C^1 sur U lorsqu'on peut la définir, i.e. lorsque $f(U) \subset V$**

  on a :

$$D_j(g \circ f)(x) = \sum_{k=1}^{q}(D_j f_k(x)(D_k g)(f(x))$$

5 Application à la caractérisation des fonctions constantes

On exploite ici les dérivées partielles des fonction pour donner une condition simple pour qu'une fonction soit constante. Puisqu'une fonction définie sur un intervalle I est condstante si et seulement si elle est de classe C^1 est de dérivée nulle sur I, on étend ce résultat en remplaçant l'intervalle I par un ouvert convexe U, puis par un ouvert connexe par arcs U.

Proposition 11 (Caractérisation des fonctions constantes sur les convexes) *Soient un ouvert U d'un espace E de dimension p et un espace F de dimension n. Si U est convexe, il y a équivalence pour une fonction $f : U \to F$:*
- *f est constante*
- *f est de classe C^1 et de différentielle nulle*
- *f est de classe C^1 et de dérivées partielles nulles dans une base (toute base) de E*

Lemme 1 *Un ouvert U d'un e.v.n. E est connexe par arcs si et seulement si, pour tout couple (x, y) de points de U, l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
1. *il existe $\phi : [0, 1] \to U$ continue telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$*
2. *il existe $\phi : [0, 1] \to U$ continue affine par morceaux avec $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$*

Proposition 12 (Caractérisation des fonctions constantes sur les connexes par arcs) *Soient un ouvert U d'un espace E de dimension p et un espace F de dimension n. Si U est connexe par arcs, il y a équivalence pour une fonction $f : U \to F$:*
- *f est constante*
- *f est de classe C^1 et de différentielle nulle*
- *f est de classe C^1 et de dérivées partielles nulles dans une base (toute base) de E*

Troisième partie
Dérivées d'ordre supérieur

Proposition 13 (Définition équivalente des fonctions de classe C^2) *Soient un ouvert U d'un espace E de dimension p et un espace F de dimension n. Pour une fonction $f : U \to F$ de classe C^1,il y a équivalence entre :*
- *pour tout vecteur $h \in E$, la fonction $D_h f : U \to F$ est de classe C^1*
- *les dérivées partielle de f dans une base (toute base) de E sont de classe C^1*

f est alors de classe C^2.

Définition 7 *Soient un ouvert U d'un espace E de dimension p et un espace F de dimension n. On dit que $f : U \to F$ est de classe C^{m+1} sur l'ouvert U si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*
- *pour tout vecteur $h \in E$, la fonction $D_h f : U \to F$ est de classe C^{m+1}*
- *les dérivées partielle de f dans une base (toute base) de E sont de classe C^{m+1}*

On dit que f est de classe C^∞ si elle est de classe C^m pour tout entier naturel m.

Proposition 14 (Théorème de Schwartz (1843-1921)) *Soient un ouvert U d'un espace E de dimension p et un espace F de dimension n. On suppose l'espace E rapporté à une base $(e_1, ..., e_p)$. Pour toute fonction $f : U \to F$ de classe C^2, on a pour $1 \le i, j \le p$:*

$$D_i D_j f = D_j D_i f \quad ou \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Quatrième partie
Champs scalaires

6 Généralités, notions de gradient

On pose ici $F = \mathbb{R}$ et E de dimension p. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, on observe que la différentielle de f en a est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, i.e. une forme linéaire sur E. Si E est euclidien, on sait que pour toute forme linéaire ϕ il existe un unique vecteur v appartenant à E tel que :

$$\forall h \in E, \phi(h) = (v, h)$$

ce qui justifie la définition suivante :

Définition 8 *Soient un espace euclidien E muni d'un produit scalaire noté $(.,.)$ et un ouvert U de E. Etant donné une application $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$, on appelle gradient de f en a l'unique vecteur de E noté $\nabla f(a)$ =grad$f(a)$ tel que :*

$$\forall h \in E, \quad df_a(h) = (\nabla f(a).h)$$

Un point a est alor dit régulier si $\nabla f(a) \neq 0_E$ et singulier ou critique si $\nabla f(a) = 0$

La différentielle de f en a est ainsi déterminée par la donnée du gradient de f en a et la différentiabilité de f en a s'écrit maintenant :

$$f(a + h) = f(a) + (\nabla f(a).h) + \circ(\|h\|)$$

Proposition 15 (Expression du gradient en base orthonormale) *Soient un espace euclidien E muni d'un produit scalaire noté $(.,.)$ et un ouvert U de E. Pour tout fonction $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$ on a :*
- *la dérivée de f en a pour tout vecteur h est $D_h f(a) = (\nabla f(a).h)$*
- *le vecteur gradient $\nabla f(a)$ s'écrit dans toutes base orthonormale $(e_1, ..., e_p)$:*

$$\nabla f(a) = D_1 f(a) e_1 + ... + D_p f(a) e_p$$

Remarque 4 (Interprétation géométrique du gradient de f en a) *Considérons une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en un point régulier $a \in U$. Pour étudier les variations locales de f dans les différentes directions autour du point a, introduisons un vecteur unitaire quelconque u ; on a établi à la proposition précédente :*

$$D_u f(a) = (\nabla f(a).u)$$

On note que la dérivée de f en a suivant le vecteur unitaire u est la projection orthogonale de $\nabla f(a)$ sur la droite dirigée par u. D'après C.S. on a : (u étant unitaire)

$$-\|\nabla f(a)\| \leq (\nabla f(a), u) \leq \|\nabla f(a)\|$$

Il en résulte que la dérivée de f en a suivant le vecteur u, qui indique la limite du taux de variation de f en a dans la direction u est :
- *maximale lorsque u est colinéaire et de même sens que $\nabla f(a)$*
  La fonction f croit le plus vite en a dans la direction de $\nabla f(a)$
- *minimale lorsque u est de sens opposé à $\nabla f(a)$*
  La fonction f décroit le plus vite en a dans la direction opposée de $\nabla f(a)$
- *nulle lorsque u est orthogonale à $\nabla f(a)$*
  L'accroissement de f est négligeable dans les directions orthogonales à $\nabla f(a)$

7 Etude des extremas : condition nécessaire

Définition 9 *On considère un ouvert U d'un espace de Banach E et une fonction $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum (minimum) local en un point $a \in U$ s'il existe une boule de centre a et de rayon r tel que :*

$$\forall x \in B(a, r) : \quad f(x) \leq f(a) (ou \quad f(x) \geq f(a))$$

Proposition 16 (Condition nécessaire d'extremum sur un ouvert) *Soit un point $a \in U$ U ouvert d'un espace E de dimension finie. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en a, si f a un minimum (maximum) local en a, alors ses dérivées partielles, donc sa différentielle, sont nulles en a.*

Remarque 5 (Recherche d'extrema des fonctions différentiables)

- *Soit une fonction différentiable (donc continue)$f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f a un maximum et un minimum sur tout compacte $K \subset U$ et :*
  - *s'ils sont atteints dans l'interieur de K on les obtient en annulant df_a*
  - *s'ils sont atteints sur la frontière de K on les obtients par d'autres méthodes*
- *Soit une fonction différentiable (donc continue) $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ avec E de dimension finie. Si $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$ alors la fonction f a un minimum sue E*

8 Etude des extremas : condition suffisante

Proposition 17 (Formule de Taylor-Young) *Soient un ouvert U d'un espace E de dimension p et un espace F de dimension n. On suppose l'espace E rapporté à une base $(e_1, ..., e_p)$. Pour toute fonction $f : U \rightarrow F$ de classe C^2 on a au voisinage de $a \in U$:*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j D_j f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} h_i h_j D_i D_j f(a) + \circ(\|h\|^2)$$

Interprétation matricielle :
Introduisons les matrices suivantes :
- $Jf_a = (D_1 f(a), ..., D_p f(a))$, matrice jacobienne de f en a
- $Hf_a = (D_i D_j f(a))$ matrice hessienne de f en a (matrice symetrique réelle)
- h qu'on identifie à la matrice colonne de ses composantes

La formule s'écrit comme suit :

$$f(a+h) = f(a) + Jf_a * h + \frac{1}{2} {}^t h * Hf_a * h + \circ(\|h\|^2)$$

Lemme 2 *Soit une matrice symétrique réelle $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Si ses valeurs propres (nécesserement réelles) sont $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_p$ on a :*

$$\min_{X \neq 0} \frac{{}^t X * M * X}{{}^t X * X} = \lambda_1 \quad ; \quad \max_{X \neq 0} \frac{{}^t X * M * X}{{}^t X * X} = \lambda_p$$

Démonstration. En effet : comme cette matrice est symétrique réelle, elle diagonalise en base orthonormale et on sait qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $D = {}^t P * M * P$, où D désigne donc la matrice dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_p$. Quitte à poser $Y = {}^t P * X$ on obtient alors :

$$\frac{{}^t X * M * X}{{}^t X * X} = \frac{{}^t X * P * D * {}^t P * X}{{}^t X * X} = \frac{{}^t Y * D * Y}{{}^t Y * Y} = \frac{\lambda_1 p y_1^2 + ... + \lambda_p y_p^2}{y_1^2 + ... + y_p^2}$$

comme $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_p$ le lemme résulte aussitôt des remarques suivantes :
- le rapport précédent est compris entre λ_1 et λ_p
- la valeur λ_1 est atteinte lorsque $y_1 = 1$ et $y_2 = ... = y_p = 0$
- la valeur λ_p est atteinte lorsque $y_p = 1$ et $y_1 = ... = y_{p-1} = 0$

Ainsi la connaissance de la plus grande et de la plus petite des valeurs propres de la matrice M permet de connaotre le signe de ${}^t X * M * X$ lorsque X décrit $\mathbb{R}^p$

Proposition 18 (Condition suffisante d'extremum sur un ouvert avec $\boldsymbol{dim(E) = 2}$) *Soit une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur un ouvert U de E et E de dimension 2. On suppose E rapporté à une base (e_1, e_2). Si les dérivées partielles d'ordre 1 s'annule en un point a de U, on pose :*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \quad ; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \quad ; \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

- *Si $rt - s^2 > 0$, il y a un extremum local eb a (maximum si $r < 0$, minimum sinon)*
- *Si $rt - s^2 < 0$, il n'y a pas d'extremum en a (on dit qu'on a un col en a)*
- *Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut conclure directement*

Cinquième partie
Quelques résultats

Définition 10 *Continuité : les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. J *continue en* u_0
2. $J(u_0+h)-J(u_0)\to 0$ *lorsque* $\|h\|\to 0$ *tel que* $\|h\|\lneq\rho$, *où* ρ *est le rayon d'une boule centrée en* u_0 *contenue dans* Ω

Différentiabilité : les assertions suivantes sont équivalentes :

1. J *est différentiable en* u_0
2. $\exists$ *une application linéaire continue notée* $d_{u_0}J : E\to F$ *tel que si* $\|u\|\leq\rho$ *on ait* $\|J(u_0+h)-J(u_0)-d_{u_0}J(h)\| = \|h\|\,\epsilon(h)$ *avec* $\epsilon(h)\to 0$ *lorsque* $h\to 0$

Exemple 5 *On prend* $E=F=\mathbb{R}$ *et* J *continuement dérivable en* $u_0\in\mathbb{R}$ *alors* J *est différentiable en* u_0 *et* $d_{u_0}J(h)=(J'(u_0))$, *matrice 1x1 ou bien* $d_{u_0}J(h)=hJ'(u_0)$. *En effet* J *est dérivable en* u_0 *alors :*

$$J(u_0+h)-J(u_0)=hJ'(u_0)+h\epsilon(|h|)$$

donc :

$$|J(u_0+h)-J(u_0)-hJ'(u_0)|=|h|\,\epsilon(|h|)$$

où $hJ'(u_0)=d_{u_0}J(h)=(J'(u_0))$

Exemple 6 *Prenons* J *application linéaire continue de* E *dans* F. *Alors* J *est différentiable de différentielle* J

Exemple 7 *Prenons* $E=\mathbb{H}$, $F=\mathbb{R}$ *et* A *application linéaire continue de* $\mathbb{H}$ *Hilbert dans* $\approx$, *autoadjointe. Puis posons* $J : u\to\frac{1}{2}(Au,u)$ *(J est appelé fonctionnelle quadratique)*

Alors : J *est différentiable de différentielle* $d_{u_0}J(h)=(Au_0,h)$ *(linéaire continue).*

En effet : $J(u_0+h)-J(u_0)=\frac{1}{2}(A(u_0+h),(u_0+h))-\frac{1}{2}(Au_0,u_0)$
$=\frac{1}{2}(Au_0,h)+\frac{1}{2}(Ah,u_0)+\frac{1}{2}(Ah,h)$
$=(Au_0,h)+\frac{1}{2}(Ah,h)$

avec : $\left|\frac{1}{2}(Ah,h)\right|\leq\frac{\|\|A\|\|\|h\|^2}{2}$

Donc $|J(u_0+h)-J(u_0)-(Au_0,h)|\to 0,\quad h\to 0$

d'où $d_{u_0}J(h)=(Au_0,h)$, *continue de* $\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ *et forme linéaire. Si* $J:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ *alors* $d_{u_0}J(h)=Re((Au_0,h))$. *Si* A *non autoadjoint en plus on a :* $d_{u_0}J(h)=\frac{1}{2}(Au_0,h)+\frac{1}{2}\overline{(A^*u_0,h)}$

Exemple 8 *Prenons* $E=\mathbb{H}=L^2(]0,1[)$ *et* $F=\mathbb{R}$. *Soit* $J_{L^2\to\mathbb{R}}u\longmapsto\int_0^1 u^2(x)dx$. *Soit* $u_0(x)\in L^2$. *Alors* J *est différentiable en* u_0 *de différentielle* $d_{u_0}(h)=2(u_0,h)$ *(linéaire continue).*

Exemple 9 *On prend* $E=L^2(]0,1[)$ *et* $F=\mathbb{R}$. *Soit* $J:u(x)\to\int_0^1\sin u(x)dx$ *et soit* $u_0\in L^2$ *alors* J *est différentiable en* u_0 *de différentielle* $d_{u_0}J(h)=\int_0^1 h(x)\cos u_0(x)dx$

En effet :

$$J(u_0+h)-J(u_0)=$$
$$\int_0^1 sin(u_0(x))(cos(h(x))-1)dx+\int_0^1(sin(h(x))-h(x))cos(u_0(x))dx+\int_0^1 h(x)cos(u_0(x))dx$$

On regarde $\phi:h\to\int_0^1 h(x)cos(u_0(x))dx$ *linéaire.*

On a :

$$|J(u_0+h)-J(u_0)-\phi(h)|=\left|\int_0^1 sin(u_0(x))(cos(h(x))-1)dx+\int_0^1(sin(h(x))-h(x))dx\right|$$

Avec Taylor on a :

$$cos(s)=1-\frac{s^2}{2}cos(c(s))+\dots$$
$$\text{donc :}|cos(s)-1|\leq\frac{s^2}{2}$$
$$\text{donc :}\left|\int_0^1 sin(u_0(x))(cos(h(x))-1)dx\right|\leq\int_0^1\left|sin(u_0(x))\frac{h^2}{2}dx\right|\leq\frac{\|h\|_{L^2}^2}{2}$$
$$\text{on prend }\epsilon(h)=\frac{\|h\|_{L^2}}{2}$$
$$\text{de même avec }sin(s)=s-\frac{s^2}{2}sin(c(s)).$$

Une autre méthode aurait été d'écrire :

$$sin(s+k) - sin(s) = kcos(s) - \frac{k^2}{2} sin(c(s))$$

Sixième partie
Deux cas : conditions suffisantes de différentiabilité

Théorème 1

Si on prend $H = L^2(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose $g_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}} s \longmapsto g(s)$ est $C^2(\mathbb{R})$. Si on a :

$$|g(s)| \leq C_1 s^2$$
$$|g'(s)| \leq C_2 s$$
$$|g''(s)| \leq C_3$$

Alors l'application $J : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$J(u) = \int_\Omega g(u(x))dx$$

est différentiable en $u_0 \in L^2(\Omega)$ et on a :

$$d_{u_0} J(h) = \int_\Omega g'(u_0(x))h(x)dx$$

Preuve 1 *On a :*

$$|J(u_0 + h) - J(u_0) - d_{u_0} J(h)| \leq \int_\Omega |g(u_0 + h(x)) - g(u_0) - g'(u_0)h(x)| \, dx.$$

On sait que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists c \in]a, b[\text{ tel que } g(b) - g(a) = g'(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} g''(c)$$

En utilisant ce résultat et en posant $a = u_0(x), b = u_0 + h(x)$ on a :

$$|J(u_0 + h) - J(u_0) - d_{u_0} J(h)| \leq \int_\Omega \left| \frac{h^2(x)}{2} g''(c) \right| dx \leq C \|h\|^2_{L^2} = \epsilon(h) \|h\|$$

Donc la différentielle est bien celle du théorème.
Voyons si J est bine définie. Soit $u \in L^2$ on a :

$$\left| \int_\Omega g(u(x))dx \right| \leq \int_\Omega |g(u(x))| \, dx \leq C \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx < \infty$$

Voyons si la différentielle est bien linéaire continue :
Elle est linéaire. Et :
$|d_{u_0} J(h)| \leq \int_\Omega |g'(u_0(x))h(x)| \, dx \leq C \int_\Omega |u_0(x)| \, |h(x)| \, dx \leq_{C.S} C \|u_0\|_{L^2} \|h\|_{L^2}$

Exemple 10 *Montrons que l'application J suivante est différentiable et calculons sa différentielle :*

$$J(u) = \int_\Omega \frac{cos(u(x)) + \frac{u^2(x)}{2} - 1}{u(x)} dx.$$

Pour ce faire montrons que $g : s \longmapsto \frac{cos(s) + \frac{s^2}{2} - 1}{s}$ vérifie les conditions du théorème.

1. *Montrons que $|g(s)| \leq C_1 s^2$ ce qui reviens a montrer que $\left| \frac{cos(s) + \frac{s^2)}{2} - 1}{s^3} \right|$ est bornée. Sa limite en l'infini est 0. Le problème de continuité se trouve en 0. Montrons la continuité en 0.*
   On a : $\left| \frac{cos(s) + \frac{s^2)}{2} - 1}{s^3} \right| = \left| \frac{s}{4} cos(\gamma(s)) \right| \leq \frac{s}{4}$ *donc tend vers 0.*
2. *Montrons que $|g'(s)| \leq C_2 s$. En l'infini cela tend vers 0. Le problème de continuité se trouve en 0. Montrons la continuité en 0. En utilisant la même astuce, i.e. utiliser le théorème de Taylor on a :*
   $|g'(s)| = \frac{s}{4!} cos(\gamma(s)) + \frac{s}{3!}(-sin(\varsigma(s)))$ *tend vers 0 en 0.*

3. *On montre de même en dérivant deux fois et en utilisant Taylor que :* $|g''(s)| \leq C_3$

Théorème 2

Si on prend $H = C([a,b])$ *(ou* $C(K)$ *avec* K *compacte). On suppose* $g_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}} s \longmapsto g(s)$ *est* $C^2(\mathbb{R})$.
Alors l'application $J : L^2(K) \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$J(u) = \int_K g(u(x))dx$$

est différentiable en $u_0 \in C(K)$ *et on a :*

$$d_{u_0}J(h) = \int_K g'(u_0(x))h(x)dx$$

Preuve 2 *J est bien définie car $g \circ u$ est continue sur K donc intégrable sur un compacte K.*
La différentielle est linéaire voyons la continuité :
$\left|d_{u_0 J(h)}\right| \leq \int_K |g'(u_0(x))| \, |h(x)| \, dx \leq \sup_K |g'(u_0(x))| \sup_K |h(x)| \, vol_d(K)$
Vérifions que c'est bien la bonne différentielle :

$$|J(u_0 + h) - J(u_0) - d_{u_0}J(h)| \leq \int_K \left|\frac{h^2(x)}{2} g''(c)\right| dx \leq \sup_K \frac{|h^2(x)|}{2} \sup_K |g''(c)| \, vol_d(K)$$

Or :

$$\sup_K |g''(c)| \leq \sup_{Z \in \gamma(K)} |g''(z)| \leq \sup_{[-A-B, A+B]} |g''(z)|$$

car $\gamma(x)$ bornée. $u_0(x) + h(x) \in (u_0 + h)(K) \subset [-B, B]$ et $u_0(x) \in u_0(K) \subset [-A, A]$ donc $\gamma(x) \in]u_0(x), u_0(x) + h(x)[\subset] - A - B, A + B[\subset [-A - B, A + B]$,