Analyse - Ballabane

NICOLAS ET BOUSQUET

Table des matières

Première partie
Théorie de Fourier

Prenons un espace vectoriel $\mathbb{E}$ et munissons le d'un produit scalaire. Un produit scalaire est une forme bilinéaire à symétrie hermitienne définie positive $b(x, y)$ déinie sur $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$. On obtient un espace préhilbertien. Si avec ce produit scalaire on forme la norme associé on obtient un espace vectoriel normé de norme $N(x) = \sqrt{b(x, x)}$. Avec cette norme on peut former la distance associée $d(x, y) = N(x - y)$ et on obtient un espace métrique.

Lorsque on est en dimension finie ces espaces sont complets mais en dimension infinie il ne le sont pas toujours. Lorsqu'ils le sont on dit d'un espace préhilbertien complet qu'il est de Hilbert et d'un espace vectoriel normé qu'il est de Banach.

Il est intéressant de remarquer que la notion de produit scalaire apporte plusieurs informations : la distance entre deux objets la mesure d'un objet et l'angle entre deux objet contrairement à la norme qui ne donne seulement que la distance et la mesure et aussi contrairement à la distance qui ne donne que la mesure.

1 Dans un espace Préhilbertien

1.1 Cauchy-Swartz

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Swartz) Soit E un espace préhilbertien muni de la forme bilinéaire b, alors $\forall x, y \in E$ on a $(b(x, y))^2 \leq q(x)q(y)$, où q est la forme quadratique associée à b tel que $q(x) = b(x, x), \forall x \in E$.

Preuve 1 Démonstration en espace euclidien :

Puisque b est positive, on a, pour tout scalaire $t \in \mathbb{R}$:

$$q(x + ty) \geq 0$$

Ce qui s'écrit encore (par bilinéarité et symétrie) :

$$q(y)t^2 + 2b(x, y)t + q(x) \geq 0$$

Lorsqu'une fonction polynômiale de degré 2 est positive partout, on sait que son discriminant réduit est positif :

$$\Delta' = b(x, y)^2 - q(x)q(y) \leq 0$$

D'où le résultat.

Remarque : pour le cas d'égalité, on fait l'hypthèse supplémentaire que b est définie positive (autrement dit b est un produit scalaire).

Exemple : si on prend pour E l'espace vectoriel des fonctions continues $[a, b] \to \mathbb{R}$, et pour b l'application $(f, g) \longmapsto \int_a^b f(x)g(x)dx$, on obtient comme cas particulier :

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b f^2(x)dx)(\int_a^b g^2(x)dx)$$

2 Dans un espace de Hilbert

2.1 Résultats

Proposition 2 Soit $\mathbb{H}$ un Hilbert et F un s.e.v de $\mathbb{H}$, alors :

$$\mathbb{H} = \overline{F} \oplus F^{\perp}$$

Proposition 3 Soit $\mathbb{H}$ un Hilbert et F un s.e.v de $\mathbb{H}$, alors :

Si F est un fermé $\overline{F} = F$
$\overline{F}$ est un fermé
$\overline{F}$ complet car c'est un fermé de $\mathbb{H}$ complet

Proposition 4 Soit $\mathbb{H}$ un Hilbert et $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ alors :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} = \sup_{\|f\|_{\mathbb{H}}=1} \|Af\|_{\mathbb{H}}$$

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |(g, Af)|$$

Preuve 2 Soit $\mathbb{H}$ un Hilbert et $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$

Montrons d'abord que :

$$\|Af\|_{\mathbb{H}} = \sup_{\|g\|=1} |(g, Af)|$$

On a :

$$|(g, Af)| \leq_{C.S} \|g\| * \|Af\| = \|Af\|$$

Donc $\forall g, \ \|g\| = 1$ on a :

$$\sup_{\|g\|=1} |(g, Af)| \leq \|Af\|$$

Si $Af = 0$, rien à faire mais si $Af \neq 0$, on pose $g_0 = \frac{Af}{\|Af\|}$

et on a : $(g_0, Af) = (\frac{Af}{\|Af\|}, Af) = \|Af\|$ donc $\|Af\| = |(g_0, Af)| \leq \sup_{\|g\|=1} |(g, Af)| \leq \|Af\|$

donc : $\sup_{\|g\|=1} |(g, Af)| = \|Af\|$

d'où :

$$\sup_{\|f\|=1} \sup_{\|g\|=1} |(g, Af)| = \sup_{\|f\|=1} \|Af\| = \||A\|| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |(g, Af)|$$

2.2 Formes linéaires et Hyperplans

Définition 1 On appelle forme linéaire sur un $\mathbb{K}ev$ E toute application linéaire définie sur E à valeur dans $\mathbb{K}$. On appelle espace dual de E l'espace vectoriel des formes linéaires noté $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

Propriété 1
- Soit $\varphi \in E^*$, son image $Im(\varphi)$ est un s.e.v de $\mathbb{K}$ de dimension 1. Donc soit l'image est reduite au singleton 0 et $\varphi = 0$ soit $Im(\varphi) = \mathbb{K}$ et φ est surjective.
- Si $dim(E) = n \ finie$, alors $dim(E^*) = n$ car $dim\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = dim(E) * dim(\mathbb{K})$

Définition 2 Soit un $\mathbb{K}ev$ E , on appelle hyperplan de E tout sous espace vectoriel H de E de codimension 1. Donc tous les supplémentaires de H dans E sont des droites vectorielles.

Proposition 5
- Soit H un hyperplan. Pour qu'une droite vectorielle $Vect(v)$ engendrée par un vecteur v non nul soit un supplémentaire de H if faut et il suffit que $v \notin H$.
- Soit F un s.e.v de E contenant H alors soit $F = H$ soit $F = E$.

Preuve 3 On sait que H est un hyperplan de E. Il est clair que si $E = H \oplus \mathbb{K}v$, $v \neq 0$ et $v \notin H$

On va montrer que si $v \notin H$ alors $E = H \oplus \mathbb{K}v \subset E$. On sait que $E = H \oplus \mathbb{K}v_0$ (il existe un supplémentaire de H de dimension 1). On a $\mathbb{K}v \bigcap H = \{0_E\}$ et $H \oplus \mathbb{K}v \subset E$, montrons que $E \subset H \oplus \mathbb{K}v$:

Si $x \in E$, alors $x = x_H + \lambda v_0$ ($v = v_H + \mu v_0$, $\mu \neq 0$ ie $v \notin H$), on a $v_0 = \frac{v - v_H}{\mu}$ donc $x = x_H + \lambda \frac{v - v_H}{\mu} = x_H - \frac{\lambda}{\mu} v_H + \frac{\lambda}{\mu} v$, donc $x \in H \oplus \mathbb{K}v$ donc $E \subset H \oplus \mathbb{K}v$

Théorème 1 (Riesz) Soit $\mathbb{H}$ Hilbert et soit f une forme linéaire continue non nulle, ($f \in \mathcal{L}_c(\mathbb{H}, \mathbb{K}) = \mathbb{H}'$ *dual de* $\mathbb{H}$), alors :

$$\exists y_0 \in \mathbb{H} \text{ tel que } f(x) = (x, y_0), \forall x \in \mathbb{H}$$

Théorème 2 (Représentation de Riesz) Soit $\mathbb{H}$ Hilbert et $\mathbb{H}'$ son dual alors :

1. $\forall a \in \mathbb{H}$ tel que $l_a : x \mapsto (x, a)$ on a $l_a \in \mathbb{H}'$ (l_a forme linéaire continue)
2. $\forall l \in \mathbb{H}'$, $\exists! a_l \in \mathbb{H}$, $l = l_{a_l}$
3. $\phi_{\mathbb{H} \to \mathbb{H}'} a \to l_a$ *est bijective, antilinéaire* ($\phi(\lambda a) = \overline{\lambda} \phi(a)$) *et isométrique* ($\|l_a\|_{\mathbb{H}'} = \|a\|_{\mathbb{H}}$)

Théorème 3 (Hyperplan associé à une forme linéaire) Soit l forme linéaire continue sur $\mathbb{H}$ alors :

$$Ker(l) = (u \in \mathbb{H},\ l(u) = 0) \text{ est un hyperplan fermé de } \mathbb{H}$$

Preuve 4 Soit $l \in \mathbb{H}'$ *Banach*. On a $Ker(l) = \{u \in \mathbb{H}, l(u) = 0\} = l^{-1}\{0\}$ et $\{0\}$ est un fermé. Comme l est continue donc l^{-1} est continue et $Ker(l)$ est l'image par une application continue d'un fermé, c'est donc un fermé.

Montrons que $Ker(l)$ est un hyperplan c'est à dire que $(Ker(l)^{\perp}$ est de dimension 1. Soit f, g dans $(Ker(l)^{\perp}$. Alors $w = l(f)g - l(g)f \in Ker(l)^{\perp}$, et $w \in Ker(l)$ donc $w = 0$ d'où $Ker(l)^{\perp}$ de dimension 1.

Théorème 4 (Hyperplan associé à une forme linéaire)

1. Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
2. Deux formes linéaires non nulles ont même noyau si et seulement si elles sont proportionelles.

2.3 Projection

Théorème 5 (Projection) Soit $\mathbb{H}$ un Hilbert et C un sous espace fermé non réduit à 0 alors :

1. $$\forall u \in \mathbb{H},\ \exists! u_c \in C,\ \inf_{v \in C} \|u - v\| = \|u - u_c\|$$
2. $\mathcal{P}_c$,application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$, la projection orthogonale sur C tel que $\mathcal{P}_c\ :\ u \rightarrow u_c$ (u_c est la projection de u sur C), est linéaire continue de norme $\|\mathcal{P}_c\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} = 1$

Théorème 6 (Caractérisation de la projection orthogonale) Soit $\mathbb{H}$ Hilbert, C un sous espace fermé et $u \in \mathbb{H}$ alors :

$$w = u_c \Leftrightarrow w \in C \text{ } et \text{ } u - w \in C^{\perp}$$

2.4 Adjoints

On prend A endomorphisme linéaire continue de $\mathbb{H}$ Hilbert.

Théorème 7 (Existence et unicité) $\exists!$ endomorphisme continue de $\mathbb{H}$, noté A^*, appelé adjoint de A tel que :

$$\forall u \in \mathbb{H},\ \forall v \in \mathbb{H},\ (Au, v) = (u, A^*v)$$

Preuve 5

1. $\forall v \in \mathbb{H}$ on regarde l'application l_v :
$$\begin{array}{ccc} u & \longmapsto & (Au, v) \\ \mathbb{H} & \rightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$
l_v est une forme antilinéaire continue , $l_v \in \mathbb{H}'$
$|(Au, v)| \leq \|Au\| * \|v\| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} \|u\| \|v\|$
$\|l_v\|_{\mathbb{H}'} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} * \|v\|_{\mathbb{H}}$
2. Riesz nous apprend que : $\forall v$ fixé, $\exists! f_v \in \mathbb{H}$ tel que :
$$l_v(.) = (., f_v) \text{ et } \|l_v\|_{\mathbb{H}'} = \|f_v\|_{\mathbb{H}}$$
3. On regarde :
$$\begin{array}{ccc} v & \longmapsto & f_v \\ \mathbb{H} & \rightarrow & \mathbb{H} \end{array}$$
Cette application est linéaire continue car elle est la composée de $l_v \rightarrow f_v$ (antilinéaire continue) et $v \rightarrow l_v$ (linéaire continue). On note alors $A^*_{\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}} : v \longmapsto f_v$
4. On a l'existence : $l_v(u) = (Au, v) = (u, f_v) = (u, A^*v)$
5. Voici l'unicité :
On prend u, v des vecteurs de $\mathbb{H}$, on a $(Au, v) = (u, A^*v) = (u, A^{*\prime}v)$
$\Rightarrow$(u,A$^*v - A^{*\prime}v) = 0\ \forall u$
$\Rightarrow$A$^*v - A^{*\prime}v = 0\ \forall v$
$\Rightarrow$A$^* = A^{*\prime}$ d'ou l'unicité.

Propriété 2 E muni d'un produit scalaire $<,>$.
- $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $(f^*)^* = f$
- $\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
- $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E)$, $(\lambda_1 * f_1 + \lambda_2 * f_2)^* = \lambda_1 * f_1^* + \lambda_2 * f_2^*$
- SI $f \in GL(E)$ et $f^* \in GL(E)$, alors $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$
- p projecteur(s symetrie) alors p^* projecteur (s^* symetrie)
- $Ker(f^*) = (Im(f))^\perp$ et $Im(f^*) = (Ker(f))^\perp$
- F stable par f $\Leftrightarrow$ $F^\perp$ stable par f^*
- $Tr(f^*) = Tr(f)$
- $det(f^*) = det(f)$
- $\chi_{f^*} = \chi_f$
- λ valeur propre de f $\Leftrightarrow$ λ valeur propre de f^*
- f diagonalisable $\Leftrightarrow$ f^* diagonalisable

Proposition 6 (automorphismes orthogonaux) On dit que f est un automorphisme orthogonal si et seulement si il vérifie l'une des quatres propriétés suivantes :
1. f conserve la norme : $\|f(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in E$
2. f conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E$, $(f(x), f(y)) = (x, y)$
3. $f \in GL(E)$ et $f^* \circ f = f \circ f^* = Id_E$
4. f transforme une b.o.n en une b.o.n

Théorème 8 (Norme)
1. $\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} = \sup_{u,v} \frac{|(Bu,v)|}{\|u\|\|v\|}$
2. $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}$

Preuve 6 1. $\forall u, v \quad |(Bu, v)| \leq \|Bu\| \, \|v\| \leq |\|B\|| \, \|u\| \, \|v\|$ ce qui donne l'inégalité $\geq$.
On a $\sup_{u,v} \frac{|(Bu,v)|}{\|u\|\|v\|} \geq \sup_{u,v=Bu\neq 0} \frac{|(Bu,v)|}{\|u\|\|v\|} = \sup_u \frac{|(Bu,Bu)|}{\|u\|\|u\|} = \sup_u \frac{\|Bu\|^2}{\|u\|\|Bu\|} = \|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}$ d'ou $\leq$
2. On applique le point 1 du théorème.

Définition 3 Les espaces de Hilbert à connaître sont :
1. $L^2(\Omega) = (u \text{ } définie \text{ } sur \text{ } \Omega, \ \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \lneq \infty)$ $(dx = dx_1 ... dx_d, \ x = (x_1, ..., x_d))$
2. $H^1(]a,b[) = (u, \ u \in L^2(]a,b[), \ u' \in L^2(]a,b[))$ de p.s : $(u,v)_{H^1} = \int_a^b u(x)\overline{v(x)}dx + \int_a^b u'(x)\overline{v'(x)}dx$
C'est l'espace de Sobolev (1932).
3. $H_0^1(]a,b[) = (u, u \in L^2(]a,b[), \ u' \in L^2(]a,b[), \ u(a) = u(b) = 0)$ de p.s : $(u,v)_{H^1} = \int_a^b u(x)\overline{v(x)}dx + \int_a^b u'(x)\overline{v'(x)}dx$
C'est un sous espace fermé de H^1 car est de Hilbert dans un Hilbert.
4. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.
5. l^2, espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes telles que :
$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 \lneq \infty \quad et \quad (u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v_n}$$
6. Tout espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est complet donc Hilbert.

3 Dans un espace de Banach

On prend dans ce sous chapitre E, F deux e.v.n complets (de Banach) non nécessairement de dimension finie. On note que toute les propriétés qui seront établient pour un Banach sont vrai pour un Hilbert puisque avec un produit scalaire on forme toujours une norme associée.

3.1 Résultats

Propriété 3 Une norme provient d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2*(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

ou

$$\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 = 2\left\|x - \frac{y+z}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|y-z\|^2$$

Propriété 4 Soit A application linéaire continue de E dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A continue en $e_0 \in E$
2. A continue en $0_E \in E$
3. A est bornée sur la boule (ou sphère) unité fermée.

Preuve 7 $1 \Leftrightarrow 2$

On utilise principalement la linéarité.
Supposons que A soit continue en 0_E alors :

$$\forall \epsilon \gneqq 0, \exists \eta_\epsilon,\ tel\ que\ \ \|\tilde{e} - 0_E\| \lneqq \eta\ alors\ \ \|A(\tilde{e}) - A(0_E)\|_F \lneqq \epsilon$$

Montrons que A est continue en 0_E :
Soit $\epsilon \gneqq 0$, d'après ce qui précède en prenant $\eta = \eta_\epsilon\ et\ \tilde{e} = e - e_0$ on a $\|e - e_0\|_E = \|\tilde{e}\|_E \lneqq \eta$
donc : $\|A(e) - A(e_0)\|_F = \|A(\tilde{e})\|_F \lneqq \epsilon$
Supposon maintenant que A est continue en e_0 alors :
$\forall \epsilon \gneqq 0, \exists \eta,\ tel\ que\ \ \|e - e_0\|_E \lneqq \eta\ \Rightarrow\ \|A(e) - A(e_0)\|_F \lneqq \epsilon$
donc : $\forall \epsilon \gneqq 0, \exists \eta,\ tel\ que\ \ \|\tilde{e}\|_E \lneqq \eta\ \Rightarrow\ \|A(\tilde{e}) - A(0)\|_F = \|A(\tilde{e})\| \lneqq \epsilon$
$1 \Leftrightarrow 3$
Si A est continue en $e \in E$, alors A est continue sur E. Or la sphère unité fermée est bornée donc A est bornée et atteint ses bornes :$\exists C \gneqq 0,\ \ tel\ \ que\ \ \|A(x)\|_F \leq C\ \ \forall x, \|x\| = 0$

Montrons la réciproque sachant que si A est bornée sur la boule unité fermée alors A est bornée sur la sphère unité fermée. En effet :

Soit $y \in B(0,1), \|y\|_E \leq 1$. Si $y = 0$, $A(0) = 0$ sinon on pose $x = \frac{y}{\|y\|} \in S(0,1)$. Or $x \in S \Rightarrow \left\|A(\frac{y}{\|y\|})\right\|_F \leq C \ \Rightarrow\ \|A(y)\|_F \leq \|y\|_E * C \leq C$

Soit A bornée sur $S(0,1)$, montrons que A est continue en 0 :

Soit $\epsilon \gneqq 0$ alors il existe C strictement positif tel que $\|A(x)\|_F \leq C\ \ \forall x, \|x\|_E = 1$. On pose $x_y = \frac{y}{\|y\|} \in S(0,1), \forall y \in E\ \ tel\ \ que\ \ y \neq 0$. On a alors $\|A(x_y)\|_F \leq C\ \ \Rightarrow\ \ \|A(y)\|_F \leq C\|y\|_E$, on prend alors ϵ strictement positif et $\eta = \frac{\epsilon}{C}$, et si $\|y\|_E \leq \eta$ alors $\|A(y)\|_F \leq \epsilon$, d'ou la continuité en 0 (et même la continuité uniforme).

Propriété 5 Soit A application linéaire continue de E dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A continue en $0_E \in E$
2. A est lipschitzienne

Donc une première caractérisation de la continuité des applications linéaires est l'existence de C constante positive strictement tel que $\|A(u)\|_F \leq C\|u\|_E,\quad \forall u \in E$.

Propriété 6 Soit $B \in \mathcal{L}(E,F)\ \ et\ \ A \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $\|A \circ B\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} * \|B\|_{\mathcal{L}(E,F)}$

Propriété 7 Soit $A : E \to F$ linéaire. Si E est de dimension finie alors A est continue.

Lemme 1 (Neumann) Soit E Banach et $A \in \mathcal{L}_c(E,E) = \mathcal{L}(E,E)$. On suppose que $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \lneqq 1$, alors $I - A$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et son inverse est donné par :

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n \geq 0} A^n$$

3.2 Des Banachs

Propriété 8 Soit E, F e.v. F Banach $\Rightarrow (\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ est un Banach.

Définition 4 Les espaces de Banach à connaître sont :

1. Soit E e.v.n et F e.v.n complet (Banach) alors $(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}(E,F)})$
2. $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$
3. Tout espace vectoriel de dimension finie muni de n'importe quelle norme est complet donc Banach.

Les espaces non Banach sont par exemple :

1. $(\mathcal{C}(]0,1[,\mathbb{R}, muni\ de\ n'importe\ quelle\ norme)$
2. $(\mathcal{C}^1([0,1]), \|.\|_\infty)$ n'est pas complet.

3.3 Propriétés sur les bases

Définition 5 (Base Orthonormée) On prend (e_n) une base de $\mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$ de dimension finie). Elle est orthonormée ssi elle est orthogonale et normée (à 1).

Définition 6 (Base Hilbertienne) On dit que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne si $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée et totale.

Proposition 7 (Existence de base orthonormée) Tout espace euclidien (espace préhilbertien réel de dimension finie) ou hermitien (espace préhilbertien complexe de dimension finie) admet une base orthonormée.

Preuve 8 On va démontrer le résultat par récurrence sur la dimension de E. Si $dim(E) = 1$ alors en prenant $x \neq 0 \in E$ on pose $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$ et alors e_1 est une b.o.n. On suppose maintenant le résultat vérifié pour un espace euclidien ou hermitien de dimension $n-1$.Soit E de dimension n euclidien ou hermitien. Soit $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$ et $H = \{x \in E, (e_1, x) = 0\}$. H est le noyau de la forme linéaire $x \longmapsto (e_1, x)$ non nulle puisque $(e_1, e_1) = 1$. Donc H est un hyperplan et sa dimension vaut $n-1$. H muni du produit scalaire de E induit sur H est un espace euclidien ou hermitien de dimension n-1 et d'après l'hypothèse de récurrence il existe une b.o.n $(e_2, \ldots, e_n)$ de H. On dispose alors de la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et c'est une b.o.n car $\|e_i\| = 1, \forall i \in [1,n]$ et $(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$. On a donc trouvé une b.o.n de E, l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour n.

Théorème 9 (Base incomplète) On considère E un espace euclidien ou hermitien de dimension finie. Alors on peut compléter toute famille orthonormale de E en une base orhtonormale de E.

Proposition 8 (Expression dans la base orthonormée) On considère E un espace euclidien ou hermitien de dimension finie et dont une b.o.n est $B = (e_1, \ldots, e_n)$. Alors si $x \in E$ $x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$. Si $(\alpha_i)_{i=1:n}$ est orthogonale seulement alors $x = \sum_{i=1}^n \frac{(x,\alpha_i)}{\|\alpha_i\|^2}\alpha_i$

4 Dans un espace quelconque

4.1 Densité

Théorème 10 (Densité) Soit D partie de $\mathbb{H}$. Les trois assertions suivantes sont equivalentes :

1. D est dense dans $\mathbb{H}$
2. $\overline{D} = \mathbb{H}$
3. $\forall u \in \mathbb{H}$, $\exists (u_n) \subset D$ tel que $u_n \longmapsto u$

- $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$
- $C([0,1])$ dense dans $L^2(]0,1[)$

4.2 Totalité

Théorème 11 (Totalité) Soit B une partie de $\mathbb{R}$. On a $B^\perp = [B]^\perp = (\overline{[B]})^\perp$. De plus les cinq assertions suivantes sont equivalentes :

1. B est totale dans $\mathbb{R}$
2. $[B]$ dense dans $\mathbb{R}$
3. $\overline{[B]} = \mathbb{R}$
4. $(\overline{[B]})^\perp = 0$
5. $B^\perp = 0$

Preuve 9 Montrons que $B^\perp = [B]^\perp = (\overline{[B]})^\perp$ ce qui montrera les assertions et leur equivalences.

On a déjà $B \subset B' \Rightarrow B'^\perp \subset B^\perp$, et $B \subset [B] \subset \overline{[B]} \Rightarrow (\overline{[B]})^\perp \subset [B]^\perp \subset B^\perp$

Soit $c \in B^\perp$ et soit $v \in [B]$ alors : $v = \sum \lambda_i b_i,\ b_i \in B \Rightarrow$(c,v)=(c,$\sum \lambda_i b_i) = \sum \overline{\lambda_i}(c, b_i) = 0$

Soit c $\in$[B]$^\perp$ Mq $\forall v \in \overline{[B]},\ (c, v) = 0$ c'est à dire que $\forall v = lim\ v_n,\ v_n \in [B]$ on a $(c, v) = (c, lim\ v_n) = lim(c, v_n) = 0$

4.3 Dimension finie ou infinie

Théorème 12 (Sur la finitude ou non de la dimension)

1. E est de dimension infinie si et seulement si il admet une famille libre infinie
2. E est de dimension finie si et seulement si il admet une famille génératrice finie.

5 Bessel et Parseval

5.1 Les theorèmes

Théorème 13 (Bessel) Soit $\mathbb{H}$ Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une b.o.n, $u \in \mathbb{H}$. On pose $\xi_n = (u, e_n)$. On a :

1. $\sum |\xi_n|^2$ converge dans $\mathbb{K}$ et $\sum |\xi_n|^2 \leq ||u||^2_{\mathbb{H}}$
2. $\sum \xi_n e_n$ converge dans $\mathbb{H}$ et :
   - $\sum_0^\infty \xi_n e_n = P_E u$ où $E = \overline{[(e_n)]}$ et P projection orthogonale sur E

Preuve 10 – On regarde $u = u - \sum_0^N \xi_n e_n + \sum_0^N \xi_n e_n$

Or $(u - \sum_0^N \xi_n e_n, \sum_0^N \xi_n e_n) = \sum_0^N \overline{\xi_m}(, u, e_m) - \sum_0^N \sum_0^N \xi_n \overline{\xi_m}' e_n, e_m)$

Le premier terme vaut : $\sum_0^N \overline{\xi_m}\xi_m$ et le second : $\sum_0^N |\xi_n|^2$

Donc :

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \left\|u - \textstyle\sum_0^N \xi_n e_n\right\|^2 + \left\|\textstyle\sum_0^N \xi_n e_n\right\|^2 \\ &\geq \left\|\textstyle\sum_0^N \xi_n e_n\right\|^2 = \textstyle\sum_0^N \|\xi_n e_n\|^2 = \sum_0^N |\xi_n|^2 \end{aligned}$$

Ce dernier terme est une série de terme positifs dont les sommes partielles sont majorées.

– On prend $S_N = \sum_0^N \xi_n e_n$

Montrons que S_N est de cauchy ($\Rightarrow$ *convergence*) :

$$\begin{aligned} \|S_P - S_Q\|^2 &= \left\|\textstyle\sum_{P+1}^Q \xi_n e_n\right\|^2 = \textstyle\sum_{P+1}^Q |\xi_n|^2 \\ &= \textstyle\sum_0^Q |\xi_n|^2 - \sum_0^P |\xi_n|^2 \leq \epsilon \end{aligned}$$

Ces deux sommes partielles convergent donc S_N est de cauchy dans $\mathbb{H}$ donc converge dans $\mathbb{H}$.

On sait que $\sum_0^\infty \xi_n e_n = P_E u \Leftrightarrow \sum_0^\infty \xi_n e_n \in E$ et $u - \sum_0^\infty \xi_n e_n^\perp$

On a déjà $\sum_0^\infty \xi_n e_n = lim\ \sum_0^\infty \xi_n e_n \in E = \overline{[(e_n)]}$

A-t-on $u - \sum_0^\infty \xi_n e_n \in E^\perp$? On a déjà $E^\perp = (e_n)^\perp$?

Montrons que , $(u - \sum_0^\infty \xi_n e_n, e_p) = 0$

$(u - \sum_0^\infty \xi_n e_n, e_p) = (u, e_p) - \sum_0^\infty \xi_n (e_n, e_p) = \xi_p - \xi_p \|e_p\|^2 = 0$

Théorème 14 (Parseval) Soit $\mathbb{H}$ Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une b.o.n totale, $u \in \mathbb{H}$. On pose $\xi_n = (u, e_n)$. On a :

1. $\sum |\xi_n|^2$ converge dans $\mathbb{K}$ et $\sum |\xi_n|^2 = ||u||^2_{\mathbb{H}}$
2. $\sum \xi_n e_n$ converge dans $\mathbb{H}$ et $\sum \xi_n e_n = u$

Preuve 11 On a $E = \mathbb{H}$ et grâce à Bessel on a les convergences et $P_E u = u$, il reste à démontrer :

$$\sum |\xi_n|^2 = \|u\|^2$$

Or $\|u\|^2 = (u, u) = (\sum \xi_n e_n, \sum \xi_p e_p) = \sum_n \sum_p \xi_n \overline{\xi_p}(e_n, e_p) = \sum_n |\xi_n|^2$

Théorème 15 (Reciproque de Parseval) Soit $\mathbb{H}$ Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une b.o.n totale (b.h). Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres tel que :

$$\sum_0^\infty |a_n|^2 \lneq \infty$$

alors :

$$\exists! u \in \mathbb{H},\ u = \sum a_n e_n$$

Preuve 12 On va montrer que S_N est de cauchy dans un Hilbert donc converge ce qui prouvera l'existence de u.

$\|S_P - S_Q\|^2 = \left\|\sum_{P+1}^Q a_n e_n\right\|^2 = \sum_{Q+1}^P |a_i|^2 = \sum_0^P |a_n|^2 - \sum_0^Q |a_n|^2 \lneq \infty$

Pour l'unicité on suppose qu'il existe u_1 et u_2 et on prouve que $u_1 = u_2$ soit directement soit en effectuant le produit scalaire avec $e_p,\ p \in \mathbb{N}$.

Lemme 2 (Rienmann) On prend $g^1([a, b])$ on a :

$$lim_{\lambda \longmapsto \infty} \int_a^b g(\theta) sin(\lambda\theta) d\theta = 0$$

Preuve 13 On intègre par partie en dérivant la fonction g.

6 Fourier et Dirichlet

Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(ou\ \mathbb{C})$, T périodique alors $g : t \longmapsto f(\frac{T}{2\pi}t)$ est 2π-périodique. Etudions donc le cas des fonctions 2π-périodique. Selon certaines conditions la fonction va pouvoir être plus ou moins bien (selon la régularité de f) approchée par une série de Fourier ou une série trigonométrique de f. On décompose la fonction donnée f dans la base hilbertienne des $e_n = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}$ en posant $c_n(f) = (f, e_n)$. Ainsi $S_f(f) = \sum c_n(f) \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}$. Les théorèmes de dirichlet nous donne des conditions à remplir pour que la fonction égale sa série. Pour le théorème de fourier qui suit on se place dans le hilbert $L^2(] - \pi, \pi[)$ muni du produit scalaire $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$

6.1 Les théorèmes

Théorème 16 (Fourier) Soit $\mathbb{H} = L^2(] - \pi, \pi[)$ Hilbert. Alor $(\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(] - \pi, \pi[)$

Preuve 14
1. On a $\sum_{-N}^N e^{in\theta} = \frac{sin(N+1/2)\theta}{sin(\theta/2)}$ (Somme de terme d'une suite géométrique)
2. On montre aussi que $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{sin(N+1/2)\theta}{sin(\theta/2)} d\theta = 2\pi$
3. On se munit du Lemme de Rienmann ci-dessus.
4. On admet que $\mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}$ est dense dans $L^2(] - \pi, \pi[)$
5. $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \theta\ fix\acute{e}\ ,\ on\ a\ :$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{sin(N+1/2)s}{sin(s/2)} \varphi(\theta - s) ds \to \varphi(\theta), N \to \infty.$$

   On a convergence simple ici.
6. On a $(\varphi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ CVS vers φ sur $[-\pi, \pi]$ c'est à dire sur $[-\pi+\epsilon, \pi-\epsilon]$ et φ est continue sur $[-\pi+\epsilon, \pi-\epsilon]$ compacte (fermé borné) $\forall \epsilon \gneq 0$. Donc il y a CVU.
7. Avec un changement de variable en $\theta - s$ on obtient :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{sin(N+1/2)(\theta-s)}{sin((\theta-s)/2)} \varphi(s) ds \to \varphi(\theta), N \to \infty \text{ uniformement.}$$

8. $\forall \varphi \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}$ on a :

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sin(N+1/2)(\theta-s)}{sin((\theta-s)/2)}\varphi(s)ds \to \varphi(\theta),\ N\to\infty$ en convergence $L^2(]-\pi,\pi[)$

En effet en notant $\phi_N(\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sin(N+1/2)(\theta-s)}{sin((\theta-s)/2)}\varphi(s)ds$ on a :

$\|\phi_N(\theta)-\phi(\theta)\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi}(\phi_N(\theta)-\phi(\theta))^2 d\theta$

$\leq \sup(\phi_N(\theta)-\phi(\theta))^2 * 2\pi \to 0$ car CVU.

9. $\forall\varphi\in\mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R})$, $C_n(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)e^{-in\theta}d\theta=(\varphi,e_n)$ on a :

   $\sum_{-N}^{N} C_n(\varphi)\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{(2\pi)}} \to \varphi(\theta),\ N\to\infty$ en convergence L^2.

   Il suffit d'écrire que $\sum_{-N}^{N} C_n(\varphi)\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{(2\pi)}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sin(N+1/2)(\theta-s)}{sin((\theta-s)/2)}\varphi(s)ds$

10. On veut montrer que e_n est totale car elle est déjà orthonormée. Il suffit de montrer donc que $L^2\subset(e_n)^\perp$, c'est à dire que si on prend $f\in L^2,\ f\perp(e_n),\ n\in\mathbb{Z}$ alors $f=0$.

    On prend donc ce f. Le point 4) nous indique $\exists\varphi_p(\theta)\to f$ en convergence L^2 où $\varphi_p(\theta)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

    $\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{f(\theta)}d\theta = (f,f)_{L^2} = (f, lim\ \varphi_p)_{L^2} = lim\ (f,\varphi_p)_{L^2}$

    $= lim_p(f, lim_N\sum_{-N}^{N} C_n(\varphi_p)e_n) = lim_p lim_N \sum_{-N}^{N}((f,e_n)\overline{C_n(\varphi_p)}) = 0,\ \forall n\in\mathbb{Z}$. Donc $f=0$.

Théorème 17 (Corollaire) On prend $L^2(]-\pi,\pi[)$ Hilbert et $\forall f\in L^2(]-\pi,\pi[)$ on pose $C_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}}dx$ alors on a :

1. $\sum_{-\infty}^{\infty}|C_n(f)|^2 = \int |f(x)|^2 dx$
2. $\sum_{-\infty}^{\infty} C_n(f)\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ converge dans $L^2(]-\pi,\pi[)$ vers $f(x)$

Théorème 18 (Dirichlet CVS) Pour toute fonction f 2π-périodique, continue par morceaux, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et régularisée, la série de fourier de f CVS vers $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n(f)e_n = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$$

Théorème 19 (Dirichlet CVU) Pour toute fonction f 2π-périodique, continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de fourier de f CVU vers f.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n(f)e_n = f(x),\ \forall x$$

6.2 Propriétés

Propriété 9 Si f est périodique de classe C^{k-1} et de classe C^k par morceaux on a :
- $C_n(f^{(k)}) = (in)^k C_n(f),\ \forall n\in\mathbb{Z}$
- $C_n(f) = ø(\frac{1}{n^k})$, $a_n(f) = ø(\frac{1}{n^k})$ et $b_n(f) = ø(\frac{1}{n^k})$ (où a_n et b_n sont les coefficients trigonométriques)

7 Complément : Opérateurs à noyau intégral

On prend Ω ouvert de $\mathbb{R}$, avec $\begin{array}{ccc} k : x,y & \longmapsto & k(x,y) \\ \Omega \times \Omega & & L^2(\Omega\times\Omega) \end{array}$ tel que $\int_\Omega\int_\Omega |k(x,y)|\,dxdy<\infty$

On note l'opérateur associé : $\begin{array}{cccc} K : L^2(\Omega) & \longmapsto & \mathrm{L}^2(\Omega) & \\ u(x) & \longmapsto & (Ku)(x) & =\int_\Omega k(x,y)u(y)dy \end{array}$ l'opérateur à noyau intégral de noyau $k(x,y)$.

Théorème 20 (Opérateur K)
1. K est linéaire et continue de $L^2(\Omega)\longmapsto L^2(\Omega)$
2. $\|K\|_{L^2}(\Omega) \leq \|k\|_{L^2}(\Omega\times\Omega)$

Preuve 15
- La linéarité est évidente.
- Continuitée :

$$\begin{array}{rcl} \left\|\int_\Omega k(x,y)u(y)dy\right\|_{L^2(\Omega)} & = & \int_\Omega\left|\int_\Omega k(x,y)u(y)dy\right|^2 dx \\ & \leq_{C.S} & \int_\Omega\left|\int_\Omega |k(x,y)|^2 dy\right|\left|\int_\Omega u(y)^2 dy\right| dx \\ & = & \left|\int_\Omega u(y)^2dy\right|\int_\Omega\left|\int_\Omega k^2(x,y)dydx\right| \\ & = & \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 * C \end{array}$$

Donc $\|K\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))}^2 \leq (\int_{\Omega\times\Omega}|k(x,y)|^2 dxdy)^{1/2} = \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$

Exemple dans l'espace $L^2(]0,1[)$: un opérateur de projection orthogonale est un opérateur à noyau intégral.

Deuxième partie
Equations de Laplace-Dirichlet

8 Dimension physique 2

Nous allons résoudre l'équation suivante à f fixé :

$$\left| \begin{array}{l} -u'' + m * u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right.$$

On peut distinguer différentes situtations : $m = 0$, $m \neq 0$, $m > 0$

- Cas $m = 0$
  $\exists! u$ qui est $u = Kf$ avec K opérateur à noyau $k(x, y)$ définie ci-dessous :
  $$K : f \longmapsto \underbrace{(1-x) * \int_0^x y f(y) dy + x * \int_x^1 (1-y) f(y) dy}_{solution}$$
- Cas $m \neq 0$
  On sait grâce à Riesz
  1. $\exists! u$ (mais on ne sait pas l'écrire)
  2. $\begin{array}{ccc} f & \longmapsto & u \\ L^2(]0,1[) & \longmapsto & L^2(]0,1[) \end{array}$ est linéaire continue.
- Cas $m \geq 0$ et m petit. Alors il existe une unique solution à condition que m soit assez petit. On utilise pour la preuve le Théorème de Neumann.

Théorème 21 $\forall f \in L^2(]0,1[)$, $\exists! u \in H_0^1(]0,1[)$ qui satisfasse a l'équation suivante :

$$\left| \begin{array}{c} -u'' + mu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \\ m \gneq 0 \end{array} \right.$$

Preuve 16
1. On regarde $l_f : v \longmapsto \int_0^1 f(x)v(x)dx$ ($l_f : H_0^1 \to \mathbb{C}$). C'est une forme linéaire continue ($|l_f(v)| \leq \|f\|_{L^2} * \|v\|_{L^2} \;\Rightarrow\; \|l_f\|_{(H_0^1)'} \leq \|f\|_{L^2}$)
2. Riesz nous apprend $\exists! u \in H_0^1$ tel que $l_f(v) = (v, u), \quad \forall v \in H_0^1$
   On a : $l_f(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx = \int_0^1 v'(x)u'(x)dx + m\int_0^1 v(x)u(x)dx$
   $= -\int_0^1 v(x)u''(x)dx + m\int_0^1 u(x)v(x)dx$
   ...par intégration par partie et en utilisant le produit scalaire suivant :
   $(v, u) = \int_0^1 v'(x)u'(x)dx + m\int_0^1 v(x)u(x)dx$
   on a donc : $\int_0^1 (-u'' + mu - f)(x)v(x)dx = 0$, $\forall v \in H_0^1 \Rightarrow -u'' + mu = f$
3. On a $\|u\|_{H_0^1}^2 = \int u'^2 + m\int v'^2 = \|l_f\|_{(H_0^1)'}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2$ donc $\eta_{L^2 \to H_0^1} : f \longmapsto u$ est continue. De même η est continue de $L^2 \to L^2$ car $\int u'^2 + m\int u^2 \geq m\int u^2 \Rightarrow \|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\|f\|_{L^2}$

Si maintenant on a à résoudre le problème suivant :

$$\left| \begin{array}{c} -u'' + mu = f \\ u(0) = 0 \\ u(L) = h \\ m \gneq 0 \end{array} \right.$$

On pose $v(x) = u(x) - \underbrace{(ae^{\sqrt{m}x} + be^{\sqrt{m}x})}_{solution\ de\ -u''+mu=0} = u(x) - v_1(x)$.

v vérifie l'équation

$$\left| \begin{array}{c} -v'' + mv = f \\ m \gneq 0 \end{array} \right.$$

En ecrivant que l'on veut $v(0) = 0$ et $v(L) = 0$ on obtient les constantes a et b. En cherchant la solution v de la seconde équation on en déduira la solution u de l'équation initiale.

9 Dimension physique 3

On cherche ici à résoudre l'équation suivante :

$$\left|\begin{array}{c} -\Delta u + mu = f(x,y) \quad (x,y) \in \Gamma \\ m \gneq 0 \\ u(x,y) = g(x,y) \quad (x,y) \in \Omega \end{array}\right.$$

f est appelée la densité de poids, g la déformation de la membrane et m le coefficient de déformation sous contraintes. On cherche donc le déplacement u engendré par les poids et la déformation.

Plaçons nous dans le cas $f = 0$ et $m = 0$:

Résolvons alors :

$$\left|\begin{array}{c} -\Delta u = 0 \\ u(x,y) = g(x,y) \quad (x,y) \in C \end{array}\right.$$

Où C désigne le cercle unité. On effectue alors un changement de variable en passant en coordonnées polaires grâce à :

$$\left|\begin{array}{c} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{array}\right.$$

Les nouveaux opérateurs de dérivation s'obtiennent grâce à ceux-là :

$$\left|\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} \end{array}\right.$$

On a :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

On définit : $H^1(D) = (u(x,y),\ u \in L^2(D),\ \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(D),\ \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(D))$ ou encore :

$$H^1(D) = (u(\rho,\theta),\ \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} |u(\rho,\theta)|^2 \rho d\rho d\theta \lneq \infty,\ \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \rho d\rho d\theta \lneq \infty,\ \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 \rho d\rho d\theta \lneq \infty)$$

Avec la relation suivante ...

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 + \frac{1}{\rho^2}\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2$$

... on a une nouvelle définition de $H^1(D)$:

$$H^1(D) = (u(x,y),\ \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} (|u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 + \frac{1}{\rho^2}\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2)\rho d\rho d\theta \lneq \infty)$$

Le problème à résoudre est alors :

$$\left|\begin{array}{c} \frac{\partial u^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \\ u(1,\theta) = g(\theta) \in L^2(C) \\ \rho \lneq 1 \\ \forall \theta \end{array}\right.$$

Théorème 22 Si $g(\theta) \in L^2(C)$, alors :

1. L'équation de Laplace Dirichlet admet une unique solution $u \in L^2(D)$
2. $u(\rho,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n(g)\rho^{|n|}\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}$, $C_n(g)$ coefficient de fourier de g.
3. L'application $\Theta_{L^2(C)\to L^2(D)} g \longmapsto u$ est linéaire continue.

Preuve 17 Nous allons démontrer le point 1 et 2 en 10 étapes :

1. $\forall \rho$ fixé on a $u(\rho,\theta) \in L^2(C) = L^2(]-\pi,\pi[)$
2. On cherche une solution developpable en série de fourier. Le théorème de Fourier nous dit que $u(\rho,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n(\rho)\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}$

3. On dérive sous le signe $\sum$ (cf année prochaine) et on a le système :
$$\left| \begin{array}{c} \sum_{-\infty}^{\infty}(C_n'' + \frac{1}{\rho}C_n' - \frac{n^2}{\rho^2}C_n)\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}} = 0 \\ \sum_{-\infty}^{\infty} C_n(1)\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}} = g(\theta) \end{array} \right.$$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}\ C_n(1) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\frac{e^{-in\theta}}{\sqrt{2\pi}}d\theta \quad et \quad C_n'' + \frac{1}{\rho}C_n' - \frac{n^2}{\rho^2}C_n = 0$
5. $\rho^{|n|} \ et \ \rho^{-|n|}$ sont solutions de l'équation caractéristique. L'espace des solutions est bien de dimension 2 car on a affaire à une ED homogène à coefficient constant d'ordre 2.
6. On a $C_n(\rho) = a_n\rho^{|n|} + b_n\rho^{-|n|} \quad n \neq 0$ et $C_0(\rho) = a_0 + b_0 \log \rho$
7. On prend $b_0 = 0$ sinon on a une singularité en $\rho = 0$ de même pour b_n.
8. On a $C_n(\rho) = a_n\rho^{|n|}$, le point 4 nous donne alors $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\frac{e^{-in\theta}}{\sqrt{2\pi}}d\theta$
9. Si elle existe, la solution complète du problème de Laplace Dirichlet pour un disque de rayon 1 est :
$$u(\rho, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n(\rho)\rho^{|n|}\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}$$
10. Montrons l'existence :
A ρ fixé on a $g \in L^2(C)$ donc $\sum |C_n(g)|^2 \lneq \infty$ donc $\sum \left|C_n(g)\rho^{|n|}\right| \lneq \infty$ car $\rho \lneq 1$, donc d'après la réciproque du théorème de parseval :
$$\sum C_n(g)\rho^{|n|}\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}} \text{ converge dans } L^2(D)$$
Montrons le point 3
$$\|u\|_{L^2(D)}^2 = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum C_n(g)\rho^{|n|}\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}\right|^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^1 \sum |C_n(g)|^2 \rho^{2|n|+1} d\rho$$
$$= \sum \frac{|C_n(g)|^2}{2|n|+2} \lneq \frac{1}{2}\|g\|_{L^2(C)}^2$$
On a donc la continuité de Θ et le fait que $u \in L^2(D)$, la linéarité étant évidente.

Théorème 23 Si $g(\theta) \in H^1(C)$, alors :
1. L'équation de Laplace Dirichlet admet une unique solution $u \in H^1(D)$
2. $u(\rho, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n(g)\rho^{|n|}\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}$, $C_n(g)$ coefficient de fourier de g.
3. L'application $\Theta_{H^1(C) \to H^1(D)} g \longmapsto u$ est linéaire continue.

Preuve 18 Montrons que $u \in H^1(D)$ et que Θ est continue :
$$\|u\|_{H^1(D)}^2 = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\left|\sum C_n(g)\rho^{|n|}\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}\right|^2 + \left|\sum |n|\, C_n(g)\rho^{|n|-1}\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}\right|^2 + \frac{1}{\rho^2}\left|\sum C_n(g)(in)\rho^{|n|}\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}\right|^2 \rho d\rho d\theta$$
$$= \int_0^1 \sum |C_n(g)|^2 (\rho^{2|n|} + n^2\rho^{2|n|-2} + \frac{n^2}{\rho^2}\rho^{2|n|})\rho d\rho$$
$$= \sum |C_n(g)|^2 (|n| + \frac{1}{2|n|+2}) \leq \sum (1+n^2)|C_n(g)|^2 = \|g\|_{H^1(C)}^2$$